

אלגברה

לינארית

1

α	β	χ	δ
ε	ϕ	φ	γ
η	ι	κ	λ
μ	ν	\omicron	π
ϖ	θ	ϑ	ρ
σ	ς	τ	υ
ω	ξ	ψ	ζ

גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת מתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק באלגברה לינארית והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
 הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/linearit.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



תוכן

3	פרק 1 - פתרון וחקירת מערכות של משוואות לינאריות.....
11	פרק 2 - מטריצות.....
17	פרק 3 - זטרמיננטות.....
23	פרק 4 - מרחבים וקטורים.....
31	פרק 5 - מספרים מרוכבים.....
37	פרק 6 - וקטורים.....
37	6.1 - וקטורים גיאומטריים.....
46	6.2 - הוקטור האלגברי.....

פרק 1 - פתרון וחקירת מערכות של משוואות לינאריות

(1) מצא אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות :

לפתרון מלא בסרטון פלאש היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר - גיא סלומון ©

$$\begin{array}{cccc} x + y = 3 & (4) & 2x + y = 3 & (3) & x - 4y = -7 & (2) & x + 10y = 11 & (1) \\ 2x + y = 4 & & x - y = 0 & & x - y = -1 & & 2x - 2y = 0 & \end{array}$$

(2) רשום את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות :

$$\begin{array}{cccc} x = 3 & (4) & 2x + y + z = 3 & (3) & x - 4y + z = -7 & (2) & x + 10y = 11 & (1) \\ 2x + y = 4 & & x - z = 0 & & x - y = -1 & & 2x - 2 = 0 & \\ z + t = 8 & & & & x + y + z = 5 & & x + y = 3 & \end{array}$$

(3) בצע על כל אחת מהמטריצות הבאות את הפעולות הרשומות מתחתיה בזה אחר זה ומצא את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} (3) & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} (2) & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} (1) \\ R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 \\ R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3 \end{array}$$

(4) מצא איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל כדי לקבל את המטריצה מימין :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} (3)$$

(5) א. הסבר והדגם את המושגים מטריצה מדורגת, מטריצה מדורגת קנונית ודירוג מטריצות.
ב. הבא את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת** (בסעיפים 1, 3, 5, 7 גם לצורה **מדורגת קנונית**):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}^{(*9)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$F=\square$, $F=\square$

* בתרגיל 9, עליך לדרג את המטריצה פעם מעל השדה \square ופעם מעל השדה \square .

(6) פתור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דרוג).

$$\begin{array}{l} 8x - 4y = 10 \quad (3) \\ -6x + 3y = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4x + 8y = 20 \quad (2) \\ 3x + 6y = 14 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x + 3y = 8 \quad (1) \\ 5x - 4y = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 3 \quad (6) \\ 4x + 6y + 16z = 8 \\ 3x + 2y + 17z = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 2y + 3z = -11 \quad (5) \\ 2x + 3y - z = -5 \\ 3x + y - z = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5 \quad (4) \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x - 2y = 1 \quad (9) \\ -9x + 6y = -3 \\ 6x - 4y = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4x - 7y = 0 \quad (8) \\ 8x - 14y = 2 \\ -16x + 28y = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 3y = 2 \quad (7) \\ 2x + y = -1 \\ x - y = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y + 2z = 2 \quad (12) \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 3z = -4 \\ 2x + 8y + 12z = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 = 3 \quad (11) \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 2y - 3z + 2t = 2 \quad (10) \\ 2x + 5y - 8z + 6t = 5 \\ 6x + 8y - 10z + 4t = 8 \end{array}$$

(7) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{lll} x+2ky+z=0 & (3) & x+ky+z=1 & (2) & x-y+z=1 & (1) \\ 3x+y+kz=2 & & x+y+kz=1 & & 5x-7y+(k^2+3)z=k^2+1 & \\ x+9ky+5z=-2 & & kx+y+z=1 & & 3x-y+(k+3)z=3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x+ky+3z=2 & (6) & kx-y=1 & (5) & 2x-y+z=0 & (4) \\ kx-y+z=4 & & (k-2)x+ky=-2 & & x+2y-z=0 & \\ 3x+y+(2+k)z=0 & & (k^2-1)z=9 & & 5x+(1-k)y+k^2z=1 & \end{array}$$

(8) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{lll} 3x+4y-z=2 & (3) & 2x-3y+z=1 & (2) & 2x+ky=3 & (1) \\ kx-2y+z=-1 & & 4x+(k^2-5k)y+2z=k & & (k+3)x+2y=k^2+5 & \\ x+8y-3z=k & & & & 6x+3ky=7k^2+2 & \\ 2x+6y-2z=0.5k+1 & & & & & \end{array}$$

(9) מצא לאילו ערכים של a ושל b (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{lll} x+y-z+t=1 & (3) & 2x+4y+az=-1 & (2) & x+2y-4z=b & (1) \\ ax+y+z+t=b & & x+2y+4z=-4 & & 7x-10y+16z=7 & \\ 3x+2y+at=1+a & & x+2y-4z=0 & & 2x-ay+3z=1 & \\ x+2y+6z=-2b & & & & & \end{array}$$

(10) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{array}{l} x+az=1 \\ y+2z=2 \\ bx+cy+dz=3 \end{array}$$

א. מצא תנאי עבור a, b, c, d כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.

ב. מצא תנאי עבור b, c, d כך שלכל a למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

(11) פתור את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס מעל השדה \mathbf{F} .

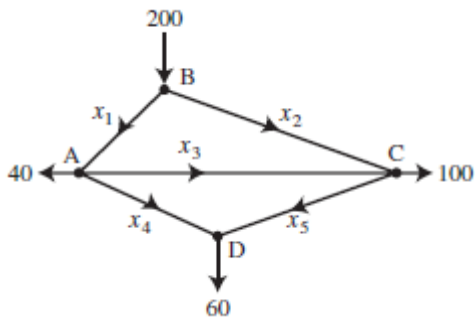
$$\begin{array}{lll} z_1+iz_2+(1-i)z_3=1+4i & (2) & x_1+2x_2+3x_3=1 & (1) \\ iz_1+z_2+(1+i)z_3=2+i & & 2x_1+4x_2+4x_3=2 & \\ (-1+3i)z_1+(3-i)z_2+(2+4i)z_3=5-i & & 3x_1+x_3=0 & \end{array}$$

$$\mathbf{F} = \square, \mathbf{F} = \square$$

$$\mathbf{F} = \square_5$$

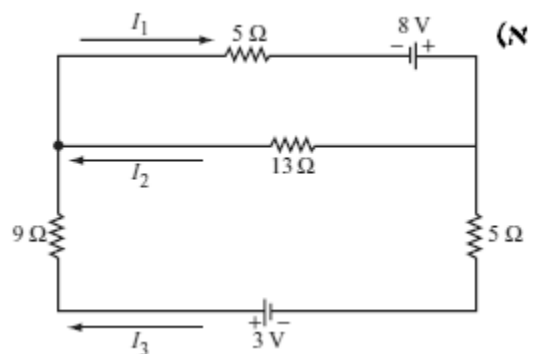
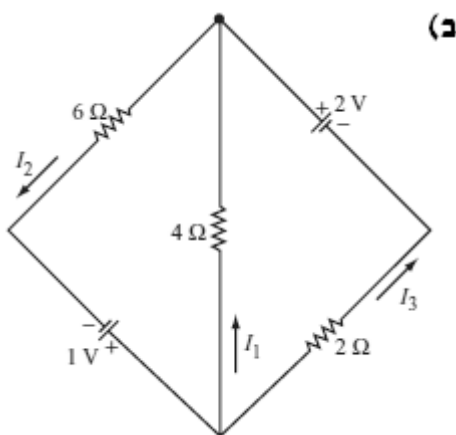
$$(12) \text{ נתונה המערכת: } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

- א. רשום את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.
 ב. רשום את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.
 ג. מצא לאילו ערכי k יש למערכת: 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.
 ד. רשום את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.
 ה. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z = 0$.
 ו. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z = 0$.
 ז. מצא עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1, 2, 3)$. האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבר.
 ח. מצא לאיזה ערך של k , הוא הפתרון היחיד של המערכת.



- (13) באיור שלפניך רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.
 א. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.
 ב. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת אם ידוע שהכביש שהזרם שלו x_4 סגור.
 ג. מהו הערך המינימלי של x_1 אם ידוע ש- $x_4 = 0$.

- (14) מצא את הזרמים במעגלים החשמליים הבאים (חוקי קירקהוף וחוק אוהם):



- * בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות לינאריות.

תשובות:

(1) (1 ו-3) שקולות ו-2 (4) שקולות.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}^{(4)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{(1)} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}^{(3)} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{(2)} \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}^{(1)} \quad (3)$$

$$R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1 \quad (2) \quad R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 \quad (2) \quad R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2 \quad (1) \quad (4)$$

(5) ב.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(5)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

F=□ F=□

(6)

$$(x, y) = (5 - 2t, t) \quad (2)$$

 ϕ (4)

$$(x, y, z) = (-1 - 7t, 2 + 2t, t) \quad (6)$$

 ϕ (8)

$$(x, y, z, t) = (-a + 2b, 1 + 2a - 2b, a, b) \quad (10)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (12)$$

$$(x, y) = (1, 2) \quad (1)$$

 ϕ (3)

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -3, -2) \quad (5)$$

$$(x, y) = (-1, 1) \quad (7)$$

$$(x, y) = \left(\frac{1+2t}{3}, t\right) \quad (9)$$

 ϕ (11)

$$\text{א} \quad k = -2 \quad \text{ב} \quad k \neq 1, k \neq -2 \quad \text{ג} \quad k = -2 \quad \text{ד} \quad k = 1 \quad \text{ה} \quad k \neq 1, k \neq -2 \quad (17)$$

 $k = 1$

$$\text{א} \quad k = 1, k = -0.4 \quad \text{ב} \quad k \neq 1, k \neq -0.4 \quad \text{ג} \quad k = -1 \quad \text{ד} \quad k = \frac{4}{7} \quad \text{ה} \quad k \neq -1, k \neq \frac{4}{7} \quad (3)$$

$$\text{א} \quad k = \pm 1, k = -2 \quad \text{ב} \quad k \neq \pm 1, k \neq -2 \quad (5)$$

$$\text{א} \quad k = -1, k = -3, k = 2 \quad \text{ב} \quad k \neq -1, k \neq -3, k \neq 2 \quad (6)$$

$$k=1 \text{ ב. } k \neq 1 \text{ א. (3) } \quad k \neq 3 \text{ ג. } k=3 \text{ ב. (2) } \quad k=1 \text{ ג. } k \neq \pm 1 \text{ ב. } k=-1 \text{ א. (1) (8)}$$

(9)

$$. a=2, b=-3 \text{ ג. } a=2, b \neq -3 \text{ ב. } a \neq 2 \text{ א. (1)}$$

$$. a=-6, b=2.5 \text{ ג. } a \neq -6 \text{ א. } b \neq 2.5 \text{ ב. (2)}$$

$$. a \neq 2 \text{ א. } a=2, b=2 \text{ ג. } a=2, b \neq 2 \text{ ב. (3)}$$

$$b=0, c=1.5, d=3 \text{ ב. } ab+2c \neq d \text{ א. (10)}$$

(11)

$$(z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{C}} = (2, 3, -1), \quad (z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{R}} = ((-1+i)t + 1+i, 3t) \quad (2) \quad (x_1, x_2, x_3) = (0, 3, 0) \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2+4 & k^2-4 \\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & 4-k^2 \end{pmatrix} \text{ ב. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2+1 & k^2-1 \\ 4 & -6 & k+2 & 4 \end{pmatrix} \text{ א. (12)}$$

$$k=2 \text{ ב. } k=-1 \text{ א. } k \neq 2, k \neq -1 \text{ ג. } 1.$$

$$(x, y, z) = (1+0.2t, 0.8t, t) \text{ ד.}$$

$$k=-2 \text{ ה. } k=\pm 2 \text{ ו. } k=-2 \text{ ז. } k=2 \text{ ח. } k=-2 \text{ ט.}$$

$$. x_4 = 60 - x_5, x_2 = 100 - x_3 + x_5, x_1 = 100 + x_3 - x_5 \text{ חופשיים. } x_5 \text{ ו- } x_3 \text{ א. (13)}$$

$$. x_5 = 60, x_4 = 0, x_2 = 160 - x_3, x_1 = 40 + x_3 \text{ חופשי. } x_3 \text{ ב.}$$

ג. 40

$$I_1 = -\frac{5}{22}, I_2 = \frac{7}{22}, I_3 = \frac{6}{11} \text{ ב. } I_1 = \frac{255}{317}, I_2 = \frac{97}{317}, I_3 = \frac{158}{317} \text{ א. (14)}$$

פרק 2 - מטריצות

(1) נתונות מטריצות: $A_{4 \times 6}$, $B_{4 \times 6}$, $C_{6 \times 2}$, $D_{4 \times 2}$, $E_{6 \times 4}$.

קבע מי מבין המטריצות הבאות מוגדרות. במידה והמטריצה מוגדרת רשום את סדר המטריצה.

$$\begin{array}{llllll} B+AB & (5) & AE-B & (4) & AC-D & (3) & AB & (2) & A+B & (1) \\ E(B-A) & (10) & E(AC) & (9) & E^T B & (8) & (E+A^T)D & (7) & E(B+A) & (6) \end{array}$$

(2) מצא את x, y, z , אם ידוע כי:

$$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

(3) נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשב (במידה וניתן):

$$\begin{array}{llllll} 2tr(D^2 - 2E) & (5) & 2D + 4EI_3 & (4) & 5C & (3) & E - D + I_3 & (2) & E + D & (1) \\ DABC & (10) & tr(C^T C) & (9) & I_2 BC & (8) & \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C & (7) & 4C^T + A & (6) \end{array}$$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא מטריצות A , ו- \underline{b} המבטאות את מערכת המשוואות

הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x} = \underline{b}$.

$$\begin{array}{ll} 2x - 3y + z + t = 1 & (2) \quad 2x + y - z = 3 & (1) \\ 4x + y + 2z = 4 & & x + 2y - 4z = 5 \\ y + z + t = 1 & & 6x + 4y + z = 2 \\ x - 4z - 2y = 10 & & \end{array}$$

(5) נתון :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

בטא כל אחת מהמשוואות הבאות כמערכת משוואות לינאריות :

$$A^T \underline{x} = 2\underline{x} + 3\underline{b} \quad (5) \quad A\underline{x} = \underline{x} \quad (4) \quad A\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{b} \quad (3) \quad A\underline{x} = 4\underline{x} + \underline{b} \quad (2) \quad A\underline{x} = \underline{b} \quad (1)$$

(6) מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T = A$ ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

א. ידוע ש- A מטריצה ריבועית. מי מבין הבאים נכון :

1. AA^T סימטרית. 2. $A + A^T$ סימטרית. 3. $A - A^T$ אנטי-סימטרית.

ב. ידוע ש- A ו- B אנטי-סימטריות מאותו סדר. מי מבין הבאים נכון :

1. $BABABA$ אנטי-סימטרית. 2. $A^2 - B^2$ סימטרית. 3. $A^2 + B$ סימטרית.

ג. ידוע ש- A ו- B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB = -BA$. מי מבין הבאים נכון :

1. AB^3 אנטי-סימטרית. 2. AB^2 סימטרית. 3. $(A - B)^2$ סימטרית.

ד. ידוע ש- A סימטרית ו- B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB = BA$. הוכח :

1. AB אנטי-סימטרית. 2. $AB + B$ אנטי-סימטרית.

ה. נתון : A, B, AB סימטריות מאותו סדר. הוכח כי $A^4 B^4 = B^4 A^4$.

(7) מצא את ההפוכה של כל מטריצה. בדוק תשובתך על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}^{(9)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

(8) א. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2 + 3 \\ 3 & -1 & k + 3 \end{pmatrix}$$

ב. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה איננה הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(9) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת המטריצה ההפוכה:

$$\begin{aligned} x + 4y + 2z + 4t &= 1 & (2) & \quad 2x - y + z = 3 & (1) \\ x + 2y - z &= 0 & & \quad 3x - 2y + 2z = 5 \\ y + z + t &= 1 & & \quad 5x - 3y + 4z = 11 \\ x + 3y - z - 2t &= 0 & & & \end{aligned}$$

(10) א. הנח שכל המטריצות הן הפיכות מסדר n וחלץ את X :

$$\begin{aligned} P^{-1}X^T P &= A & (3) & \quad A^{-1}XC = A^{-1}DC & (2) & \quad AXC = D & (1) \\ ABC^T X^{-1}BA^T C &= AB^T & (6) & \quad (A - AX)^{-1} = X^{-1}C & (5) & \quad C^{-1}(A + X)D^{-2} = I & (4) \end{aligned}$$

ב. נתון $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$. חשב את X אם ידוע כי $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$.

ג. נתון $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. חשב את Y אם ידוע כי $BYB^T = B^{-1} + B$.

ד. נתון $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. חשב את B אם נתון $5A^T B (I + 2A)^{-2} = (7A)^{-2}$.

(11) א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2 - 5A - 2I = 0$.

הוכח: A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I .

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A - 3I)(A + 2I) = 0$.

הוכח: A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}, p(x) = x^3 - 4x^2 - 20x + 48$$

1. חשב את $p(A)$.

2. בעזרת תוצאת סעיף 1 (ולא בדרך אחרת) הוכח ש- A והפיכה ובטא את A^{-1} בעזרת A

ו- I בלבד.

(12) נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4 = 0$.

א. הוכח כי A לא הפיכה.

ב. הוכח כי המטריצה $I - A$ הפיכה ומצא את ההופכית שלה.

$$(13) \text{ נתון: } \begin{cases} P^{-1}AP = B \\ Q^{-1}BQ = C \end{cases} \text{ הוכח כי קיימת מטריצה הפיכה } D \text{ כך ש- } D^{-1}AD = C$$

* הנח שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג דימיון מטריצות ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכח: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C אז A דומה ל- C (כלומר יחס הדימיון

הוא יחס טרנזיטיבי).

הערה

בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

תשובות:

$$\begin{matrix} (5 & (4 & 4 \times 2 & (3 & (2 & 4 \times 6 & (1 & (1) \\ 6 \times 6 & (10 & 6 \times 4 & (9 & (8 & 6 \times 2 & (7 & 6 \times 6 & (6 \end{matrix}$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}^{(4)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}^{(1)} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}^{(7)} \quad \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}^{(6)} \quad 230 \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}^{(10)} \quad 63 \quad (9)$$

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{matrix} (4+k)x - 2y + 4z = 1 & (3) & -2y + 4z = 1 & (2) & 4x - 2y + 4z = 1 & (1) & (5) \\ x + (k-1)y + z = 2 & & x - 5y + z = 2 & & x - y + z = 2 & & \\ x - 6y + (3+k)z = 3 & & x - 6y - z = 3 & & x - 6y + 3z = 3 & & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2x + y + z = 3 & (5) & 3x - 2y + 4z = 0 & (4) \\ -2x - 3y - 6z = 6 & & x - 2y + z = 0 & \\ 4x + y + z = 9 & & x - 6y + 2z = 0 & \end{matrix}$$

1,2,3 .ג 2.ב 1,2,3 .א (6)

(7)

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{(3)} & \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}^{(2)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}^{(1)} \\
 & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{(6)} & \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{(5)} & \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{(4)} \\
 & \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{(9)} & \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{(8)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^{(7)}
 \end{aligned}$$

$$k = 1, k = -4 \quad (2) \quad . \quad k \neq 1, k \neq -2 \quad (1) \quad (8)$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad (2) \quad . \quad (x, y, z) = (1, 2, 3) \quad (1) \quad (9)$$

$$. \quad CD^2 - A \quad .4 \quad . \quad (P^{-1})^T A^T P^T \quad .3 \quad . \quad D \quad .2 \quad . \quad A^{-1}DC^{-1} \quad .1 \quad . \quad \aleph \quad (10)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad .6 \quad . \quad (A + C^{-1})^{-1} A \quad .5$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad . \tau \quad Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad . \lambda \quad X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad . \beta$$

$$. \quad A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I \quad . \beta \quad A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad . \aleph \quad (11)$$

$$. \quad B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I \quad .2 \quad , \quad f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .1 \quad . \lambda$$

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad . \beta \quad (12)$$

פרק 3 - דטרמיננטות

(1) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$\begin{pmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{(9)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{(11)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(10)}$$

(2) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(4)}$$

(3) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

(4) ללא חישוב, הראה שהדטרמיננטה של המטריצות הבאות שווה אפס:

לפתרון מלא בסרטון פלאש היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר - גיא סלומון ©

$$\begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 z & 1 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$$(5) \text{ נתון: } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4. \text{ חשב:}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}^{(2)} \quad \begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}^{(1)}$$

$$(6) \text{ א. הוכח כי } \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\text{ב. הוכח כי } \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$$

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתונה מטריצה ריבועית מסדר n . חשב את הדטרמיננטה של

המטריצה הנתונה :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j=n+1 \\ 0 & \text{תרחא} \end{cases} \quad (3) \quad a_{ij} = \begin{cases} j & i=j+1 \\ n & i=1, j=n \\ 0 & \text{תרחא} \end{cases} \quad (2) \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j=1 \\ 0 & i=j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 3(n-1) \end{pmatrix} \quad (6) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \quad (5) \quad a_{ij} = \begin{cases} a & i=j \\ b & \text{תרחא} \end{cases} \quad (4)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i=j \\ b & i=j+1 \\ c & j=i+1 \end{cases} \quad (*7)$$

* בסעיף 7): א. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה. ב. הנח כי $a=3, b=1, c=2$ ומצא:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה. 2. את הדטרמיננטה כאשר $n=20$.

(8) חשב:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$$

(9) נתונים: A ו- B מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$. חשב:

$$|-2A^2 A^T \text{adj} B| \quad (4) \quad |-A^{-2} B^T A^3| \quad (3) \quad |4A^2 B^3| \quad (2) \quad |ABA^{-1} B^T| \quad (1)$$

(10) א. נתון: $(PQ)^{-1} APQ = B$ הוכח: $|A|=|B|$.

ב. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, $2AB+3I=0$, $|A|=2$.

חשב את $|B|$.

ג. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, $B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.

חשב את: $|A|, |B|$.

ד. הוכח: 1. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$. 2. $|adj(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}$.

ה. נתון כי A מטריצה אנטיסימטרית מסדר אי זוגי. הוכח ש- $|A| = 0$.

ו. נתונים: A מטריצה מסדר n , $|A| = 128$, $2AB = B^T A^2$, מצא את n .

ז. נתונים: $\det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}$, $\det(A_{n \times n}) = 2$. חשב: $\det\left(\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right)$.

(11) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{rcl} x + 2z + 5t = 8 & (3) & x + z = 3 & (2) & x + 2y = 5 & (1) \\ -2x - 6y = -8 & & 4x + y + 8z = 21 & & 3x + 4y = 11 & \\ 5x + 3y - 7z + 4t = 5 & & 2x + 3z = 8 & & & \\ 2x + 5y + 44z = 51 & & & & & \end{array}$$

(12) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{array}{l} kx + y + z + t + r = 1 \\ x + ky + z + t + r = 1 \\ x + y + kz + t + r = 1 \\ x + y + z + kt + r = 1 \\ x + y + z + t + kr = 1 \end{array}$$

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{5}$?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד אז בהכרח $x = y = z = t = r$.

(13) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות חשב את הצמודה הקלסית $adj(A)$ ובעזרתה את A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

(14) נתון:

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

חשב: (1) $(adjA)_{1,5}$ (2) $(A^{-1})_{1,5}$

(15) א. הוכח שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים, אזי כל איברי A^{-1} הם גם מספרים שלמים.

ב. נתון ש- A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה. הוכח ש- A^{-1} משולשית תחתונה.

ג. נתון ש- A הפיכה. הוכח שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

ד. נתון: A, B הפיכות. C, D לא הפיכות.

האם המטריצות הבאות הפיכות: (1) $C + D$ (2) $A + B$ (3) AD (4) CD (5) AB ?

(16) מצא את ערכי k עבורם המטריצה הבאה לא הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(17) א. חשב את שטח המקבילית שקודקודיה:

1. $(0,0), (5,2), (6,5), (11,6)$ 2. $(-1,0), (0,5), (1,-4), (2,1)$

ב. חשב את נפח המקבילון שקודקודיו: $(0,0,0), (1,0,-2), (1,2,4), (7,1,0)$

ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(3,3,-2), (-1,3,1), (1,1,-1)$

ד. חשב את שטח המשולש שקודקודיו: $(1,2), (3,4), (5,8)$

הערה: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בטרמיננטות.

תשובות:

9 (10) .-300 (9) .234 (8) .24 (7) .-14 (6) .-3 (5) .-1 (4) .-1 (3) .29 (2) . $ad-bc$ (1) (1)

.6 (11) .6 (1) (2) .0 (2) .0 (3) .3 (4) .24 (5) .44 (6) .104 (7) (3) (1) .120 (2) .114 (3) .6 (3)

(5) (1) .-8 (2) .16 (3) .9 (7) (1) $n!$ (2) $(-1)^{n-1}n!$ (3) $\frac{n(3n+1)}{2}$ $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$

(4) $(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$ (5) .1 (6) $2 \cdot 3^{n-2}$

(7) $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$, $D_2 = a^2 - bc$, $D_3 = a^3 - 2abc$.א

ב.1. $D_n = 2^{n+1} - 1$.2 $D_{20} = 2^{21} - 1$ (8) .0 (9) (1) .4 (2) 2^{13} (3) .-8 (4) -2^{11}

(10) ב. $81/32$.ג $|A|=18$, $|B|=-2/3$.ד 4^n (11) (1) $x=1$, $y=2$

(2) $x=1$, $y=1$, $z=2$ (3) $x=y=z=t=1$ (12) .א $k \neq 1$, $k \neq -4$.ב $k = -2$

ג. לא.

$$adj(A) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \quad adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (1) (13)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad adj(A) = \begin{pmatrix} -7 & 10 & 20 & -4 \\ 2 & -3 & -6 & 1 \\ -3 & 5 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

(14) (1) .240 (2) .0.5 (15) (1) לא (2) לא (3) לא (4) לא (5) כן. (16) $k=0$

(17) א.1. .13 .א.2. .14 .ב. 22 .ג. $3x-y+4z+2=0$.ד. 2

פרק 4 - מרחבים וקטורים

סימונים:

R^n - המרחב הוקטורי של כל הוקטורים הממשיים ממימד n מעל השדה הממשי R .

$M_n[R]$ - המרחב הוקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R .

$P_n[R]$ - המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n מעל השדה R .

$F[R]$ - המרחב הוקטורי של כל הפונקציות הממשיות ($f: R \rightarrow R$) מעל השדה R .

תת-מרחבים

(1) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W תת מרחב של R^3 :

א. $W = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\}$

ב. $W = \{(a, b, c) \mid a = c\}$

ג. $W = \{(a, b, c) \mid a = 3b\}$

ד. $W = \{(a, b, c) \mid a < b < c\}$

ה. $W = \{(a, b, c) \mid a = c^2\}$

ו. $W = \{(a, b, c) \mid b = a + d, c = a + 2d\}$, כלומר a, b ו- c מהווים סדרה חשבונית.

ז. $W = \{(a, b, c) \mid b = a \cdot q, c = a \cdot q^2\}$, כלומר a, b ו- c מהווים סדרה הנדסית.

(2) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W תת מרחב של $M_n[R]$:

א. $W = \{A \mid A = A^T\}$, כלומר, W מורכב מן המטריצות הסימטריות.

ב. W מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה B .

כלומר, $W = \{A \mid AB = BA\}$.

ג. $W = \{A \mid |A| = 0\}$, כלומר, W מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס.

ד. $W = \{A \mid A^2 = A\}$, כלומר, W מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן.

ה. W מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

ו. W מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה B הוא אפס, כלומר,

$W = \{A \mid AB = 0\}$

ז. $W = \{A \mid \text{tr}(A) = 0\}$, כלומר, אפס. כלומר, $W = \{A \mid \text{tr}(A) = 0\}$.

ח. W מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

(3) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W הוא תת מרחב של $P_n[R]$.

א. $W = \{p(x) \mid p(4) = 0\}$, כלומר, 4 כשורש. כלומר, $W = \{p(x) \mid p(4) = 0\}$.

ב. W מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

ג. $W = \{p(x) \mid \deg(p) \leq 4\}$, כלומר, $4 \geq \deg(p)$.

ד. W מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של x .

ה. W מורכב מכל הפולינומים ממעלה n כאשר $4 \leq n \leq 7$.

ו. $W = \{p(x) \mid p(0) = 1\}$.

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W הוא תת מרחב של $F[R]$.

א. $W = \{f(x) \mid f(-x) = f(x)\}$ כלומר, לכל x ממשי $f(-x) = f(x)$.

ב. $W = \{f(x) \mid |f(x)| \leq M\}$ כלומר, לכל x ממשי $|f(x)| \leq M$.

ג. W מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

ד. W מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

ה. W מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

ו. $W = \left\{ f(x) \mid \int_0^1 f(x) dx = 4 \right\}$ (הנח ש- f אינטגרבילית ב $[0, 1]$).

ז. $W = \{f(x) \mid f'(x) = 0\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

ח. $W = \{f(x) \mid f'(x) = 1\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

ט. $W = \{f(x) \mid f(x) = f(x+1)\}$.

(5) בדוק האם $W = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_2 = \bar{z}_1, z_3 = z_1 + \bar{z}_1\}$ הוא תת מרחב של C^3 :

א. מעל השדה הממשי R .

ב. מעל שדה המרוכבים C .

צירופים לינאריים, מרחב נפרש, תלות לינארית

(6) נתונים הוקטורים הבאים :

$$u_1 = (4,1,1,5), u_2 = (0,11,-5,3), u_3 = (2,-5,3,1), u_4 = (1,3,-1,2)$$

א. 1. האם u_1 הוא צירוף לינארי של u_4 ?2. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?3. האם הקבוצה $\{u_1, u_4\}$ תלוייה לינארית ?ב. 1. האם u_3 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?2. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?3. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ תלוייה לינארית ? במידה וכן רשום כל וקטור בקבוצה

כצירוף לינארי של הוקטורים האחרים.

ג. 1. האם u_4 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?2. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?3. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_4\}$ תלוייה לינארית ? במידה וכן רשום כל וקטור בקבוצה

כצירוף לינארי של הוקטורים האחרים.

$$ד. נתון $v = (4,12,k,-2k)$.$$

1. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהוקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?2. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהוקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$.3. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהייה תלוייה לינארית.

$$ה. נתון $v = (a,b,c,d)$$$

1. מה התנאים על a,b,c,d על מנת שהוקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?1. מה התנאים על a,b,c,d על מנת שהוקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?1. מה התנאים על a,b,c,d על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהייה תלוייה לינארית ?ו. הבע את הוקטור $(2,-3,3,1)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2 ו- u_3 .

בכמה אופנים ניתן לעשות זאת ?

ז. הבע את הוקטור $(7,10,-2,11)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 ו- u_4 . בכמה אופנים

ניתן לעשות זאת ?

(7) נתונות המטריצות הבאות :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. בדוק האם המטריצות תלויות לינארית מעל $M_2[R]$.

2. במידה והמטריצות תלויות רשום כל אחת מהמטריצות כצירוף לינארי של יתר המטריצות.

3. האם המטריצה A שייכת ל- $Sp\{B, C\}$?

(8) נתונים הפולינומים הבאים :

$$p_1(x) = 4 + x + x^2 + 5x^3, p_2(x) = 11x - 5x^2 + 3x^3,$$

$$p_3(x) = 2 - 5x + 3x^2 + x^3, p_4(x) = 1 + 3x - x^2 + 2x^3$$

1. בדוק האם הפולינומים תלויים לינארית מעל $P_3[R]$.

2. במידה והפולינומים תלויים לינארית רשום כל פולינום כצירוף לינארי של

שאר הפולינומים.

3. האם הפולינום p_2 שייך ל- $Sp\{p_1, p_4\}$?

(9) עהוא איזה ערכים של a, b, c הוקטורים הבאים תלויים לינארית :

$$\{(c, 2, 4), (2, 4, a, 2), (c, b, 6), (b, 2, a)\}$$

(10) נתון כי קבוצת הוקטורים $\{u, v, w\}$ בלתי תלויה לינארית ב- $V[F]$.

בדוק האם הקבוצות הבאות תלויות לינארית, במידה שכן רשום כל וקטור כצירוף

של הוקטורים האחרים :

$$א. \{u - v, u - w, u + v - 2w\}$$

$$ב. \{u + 2v + 3w, 4u + 5v + 6w, 7u + 8v + 9w\}$$

$$ג. \{u + v, v + w, w\}$$

(11) בדוק האם הוקטורים $\{(1, i, i-1), (i+1, i-1, -2)\}$ תלויים לינארית ב- C^3

א. מעל C . ב. מעל R .

בסיס ומימד

בדיקה האם קבוצת וקטורים מהווה בסיס למרחב

(12) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :

$$(1) \{ (1,0,1), (0,0,1) \}$$

$$(2) \{ (1,1,2), (1,2,3), (3,3,4), (2,2,1) \}$$

$$(3) \{ (1,2,3), (4,5,6), (7,8,9) \}$$

(13) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $M_{2 \times 2}[R]$:

$$(1) \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(2) \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(3) \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(14) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $P_2(R)$:

$$(1) \{ 1+x, x^2+2x+3 \}$$

$$(2) \{ 1+x, x^2+2x+3, 2x+4x^3, x-x^3 \}$$

$$(3) \{ 1+2x+3x^3, 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2 \}$$

(15) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 : $T = \{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9), (2,3,4)\}$

א. האם T בסיס ל- R^3 .

ב. מצא קבוצה T' , שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים בלתי תלוייה לינארית ב- T .

ג. השלם את T' לבסיס של

מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית

(16) לפי 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

$$\begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ 2x - 2y + 2z + 2w = 0 \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + 2z - w = 0 \\ x + y + 3z - 3w = 0 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x + y - z + 2w = 0 \\ 3x - y + 7z + 4w = 0 \\ -5x + 3y - 15z - 6w = 0 \end{cases} \quad (1)$$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות (1).

נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות (2).

נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות (3).

(א) מצא בסיס וממד ל- U , W ו- V .

(ב) (1) מצא בסיס וממד ל- $U \cup V$. (2) מצא ממד ל- $U \cap V$.

(ג) מצא בסיס ל- $U \cap V$.

(17) נתון $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = c, b = d\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(18) נתון $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid c = a + b, d = b + c\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(19) נתון $U = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \cdot (1, -1, 1, -1) = 0\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(20) נתון $U = \{A \in M_{2 \times 2}[\mathbb{R}] \mid A = A^T\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(21) נתון $U = \left\{ A \in M_{2 \times 2}[\mathbb{R}] \mid A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(22) נתון $U = \{p(x) \in P_3[\mathbb{R}] \mid p(1) = 0\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

מציאת בסיס וממד לתת מרחב

(23) לפניכם שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = \text{span}\{(1,1,-1,2), (3,-1,7,4), (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = \text{span}\{(1,-1,1,1), (1,0,2,-1), (1,1,3,-3), (5,1,5,8)\}$$

א. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- U .

ב. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- V .

ג. מצא בסיס וממד ל- $U \cup V$.

ד. מצא בסיס וממד ל- $U \cap V$.

(24) לפניכם תת מרחב של המרחב $M_{2 \times 2}[R]$:

$$U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}$$

מצא בסיס וממד ל- U .

(25) לפניכם תת מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$U = \text{span}\{1+x-x^2+2x^3, 4+x-x^2+x^3, 2-x+x^2-3x^3\}$$

מצא בסיס וממד ל- U .

מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה

(26) מצא בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצות הבאות וציין את דרגת

המטריצה (rank) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

וקטורי קואורדינטות, שינוי בסיס(27) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}, \quad B_2 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשר את הטענות הבאות :

$$[M]_{B_1}^{B_2} = \left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1} \quad (3) \quad [M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1} \quad (2) \quad [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2} \quad (1)$$

(27) נתונים שני בסיסים של $P_2[R]$:

$$B_1 = \{1+x, x, x+x^2\}, \quad B_2 = \{1+x^2, x+x^2, x^2\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.(28) נתונים שני בסיסים של $M_2[R]$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B . סמן וקטור זה ב- $[v]_B$.ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס E . סמן וקטור זה ב- $[v]_E$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס E . סמן מטריצה זו ב- $[M]_B^E$.

פרק 5 - מספרים מרוכבים

ידע מוקדם: חקירת משוואה ריבועית, זהויות ומשוואות טריגונומטריות, משוואות מעריכיות, סדרות (חשבוניות והנדסיות), מציאת מקומות גיאומטריים (גיאומטריה אנליטית).

הגדרה: $i = \sqrt{-1}$ מספר מרוכב: $z = a + bi$ (a ו- b ממשיים)

a נקרא הרכיב הממשי של z ומסומן גם $\text{Re}(z)$

bi נקרא הרכיב המדומה של z ומסומן גם $\text{Im}(z)$

המספר הצמוד: $\bar{z} = a - bi$

מספר מרוכב בהצגה קוטבית: $z = R \text{cis} \theta$

מעבר מהצגה אלגברית להצגה קוטבית: $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan \theta = \frac{b}{a}$

מעבר מהצגה קוטבית להצגה אלגברית: $a = R \cos \theta$, $b = R \sin \theta$

$|z| = R = \sqrt{a^2 + b^2}$ - גודלו של המספר המרוכב z . מתקיים:

פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

$$z_1 \cdot z_2 = (R_1 \text{cis} \theta_1) \cdot (R_2 \text{cis} \theta_2) = R_1 R_2 \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1 \text{cis} \theta_1}{R_2 \text{cis} \theta_2} = \frac{R_1}{R_2} \text{cis}(\theta_1 - \theta_2)$$

משפט דה-מואבר: $(R \text{cis} \theta)^n = R^n \text{cis}(n\theta)$

השורשים מסדר n של מספר מרוכב: $z^n = R \text{cis} \theta \Rightarrow z_k = \sqrt[n]{R} \text{cis} \left(\frac{\theta}{n} + \frac{360^\circ k}{n} \right)$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

תוכן הסרטון	מספר תרגיל בדף התרגילים	מס' סידורי
ידע מקדים, רקע היסטורי, הגדרת i		1
	תרגיל 1	2
	תרגיל 2	3
הכרות עם המספר המרוכב $z = a + bi$	תרגיל 3	4
	תרגיל 4	5
	תרגיל 5	6
	תרגיל 6	7
חיבור, חיסור וכפל במספרים מרוכבים	תרגיל 7	8
המספר הצמוד		9
	תרגיל 8	10
חילוק מספרים מרוכבים	תרגיל 9	11
	תרגיל 10	12
	תרגיל 11	13
	תרגיל 12	14
כולל שוויון בין מספרים מרוכבים והצבת $z = a + bi$ כשיטה לפתרון משוואות מרוכבות	תרגיל 13	15
	תרגיל 14	16
	תרגיל 15 א'	17
	תרגיל 15 ב'	18
	תרגיל 16	19
	תרגיל 17	20
	תרגיל 18	21

סרטון 22		חקירת משוואה ריבועית מרוכבת
סרטון 23	תרגיל 19	
סרטון 24		מישור גאוס, הצגה קוטבית של מספר מרוכב, מעבר מהצגה קוטבית של מספר מרוכב להצגתו האלגברית
סרטון 25	תרגיל 20	
סרטון 26		מעבר מהצגה אלגברית של מספר מרוכב להצגתו הקוטבית
סרטון 27	תרגיל 21	
סרטון 28		פעולות חשבון בהצגה קוטבית
סרטון 29	תרגיל 22	
סרטון 30	תרגיל 23	
סרטון 31	תרגיל 24	
סרטון 32	תרגיל 25	
סרטון 33	תרגיל 26	
סרטון 34	תרגיל 27	
סרטון 35	תרגיל 28	
סרטון 36	תרגיל 29	
סרטון 37	תרגיל 30	
סרטון 38	תרגיל 31	
סרטון 39		משפט דה-מואבר
סרטון 40	תרגיל 32	
סרטון 41		הוצאת שורש מסדר n של מספר מרוכב
סרטון 42	תרגיל 33	
סרטון 43		משוואת היחידה, שורשי היחידה, סכום ומכפלת שורשי היחידה
סרטון 44	סרטון 34	
סרטון 45	תרגיל 35	שאלה על מקום גיאומטרי (לראשונה)
סרטון 46	תרגיל 36	
סרטון 47	תרגיל 37	
סרטון 48		תזכורת בנושא סדרות
סרטון 49	תרגיל 38	
סרטון 50	תרגיל 39 א'	
סרטון 51	תרגיל 39 ב'	
סרטון 52	תרגיל 40	
סרטון 53	תרגיל 41	
סרטון 54	תרגיל 42	
סרטון 55	תרגיל 43	פתרון בדרך הצגה טריגונומטרית
סרטון 56	תרגיל 43	פתרון בדרך הצגה אלגברית
סרטון 57	תרגיל 44	
סרטון 58	תרגיל 45	
סרטון 59	תרגיל 46	
סרטון 60	תרגיל 47	
סרטון 61	תרגיל 48	
סרטון 62	תרגיל 49	פתרון בדרך הצגה טריגונומטרית
סרטון 63	תרגיל 49	פתרון בדרך הצגה אלגברית
סרטון 64	תרגיל 50	

תרגילים:1. רשום עם i :

$$א. \sqrt{-1} = \quad ב. \sqrt{-4} = \quad ג. \sqrt{-25} = \quad ד. \sqrt{-3} = \quad ה. \sqrt{-5} =$$

2. חשב:

$$א. i = \quad ב. i^2 = \quad ג. i^3 = \quad ד. i^4 = \quad ה. i^5 = \quad ו. i^{17} =$$

3. רשום את ערכם של a ו- b עבור המספרים המרוכבים הבאים:לפתרון מלא בסרטון פלאש היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר - גיא סלומון ©

$$\text{א. } 2+5i \quad \text{ב. } 3-i \quad \text{ג. } \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i \quad \text{ד. } 7i \quad \text{ה. } -4 \quad \text{ו. } 1.0$$

4. פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } x^2 = -1 \quad \text{ב. } x^2 + 36 = 0 \quad \text{ג. } x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$5. \text{ פתור את המשוואה הבאה: } x^2 + x + 1 = 0$$

$$6. \text{ פתור את המשוואה הבאה: } z^2 + iz + 6 = 0$$

$$7. \text{ נתון: } z_1 = 2+3i, z_2 = 5-2i \text{ . חשב:}$$

$$\text{א. } z_1 + z_2 = \quad \text{ב. } z_1 - z_2 = \quad \text{ג. } z_1 \cdot z_2 =$$

8. רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

$$\text{א. } 2+5i \quad \text{ב. } 3-i \quad \text{ג. } \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i \quad \text{ד. } 7i \quad \text{ה. } -4 \quad \text{ו. } 1.0$$

9. חשב:

$$\text{א. } \frac{11+2i}{2-i} = \quad \text{ב. } \frac{3+7i}{2-5i} = \quad \text{ג. } \frac{19-9i}{2-3i} =$$

$$10. \text{ פתור את המשוואה הבאה: } 3z - 11 = iz - 7i$$

$$11. \text{ פתור את המשוואה הבאה: } iz + 5 = 4i$$

12. פתור את מערכת המשוואות הבאה (z ו- w משתנים מרוכבים):

$$\begin{cases} 3z + iw = 5 - 4i \\ 5iz - 2w = 5 + 8i \end{cases}$$

13. פתור את המשוואות הבאות שבהן a ו- b ממשיים:

$$\text{א. } 2a - 3i = 10 + bi \quad \text{ב. } 3a - 8 + 5bi = 2b - ai - 3i$$

$$14. \text{ פתור את המשוואה הבאה: } 2z + 7i = iz + \bar{z} - 3$$

15. חשב:

$$\text{א. } \sqrt{5-12i} = \quad \text{ב. } \sqrt{8+6i} =$$

$$16. \text{ פתור את המשוואה הבאה: } z^2 - 2(1-2i)z - 8i = 0$$

$$17. \text{ פתור את המשוואה הבאה: } iz^2 - 2(1-i)z + 6 + 15i = 0$$

$$18. \text{ פתור את המשוואה הבאה: } z^2 - i\bar{z} + 6 = 0$$

$$19. \text{ נתונה המשוואה הבאה: } (mi-2)z^2 - 2(m+2i)z + 1 = 0$$

מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר המרוכב m למשוואה: א. יש פתרון יחיד. ב. אין פתרון.

20. הפוך להצגה אלגברית:

$$\text{א. } 2cis60^\circ = \quad \text{ב. } 6cis135^\circ = \quad \text{ג. } 4cis330^\circ = \quad \text{ד. } 4cis(-30^\circ) =$$

$$\text{ה. } 4cis690^\circ = \quad \text{ו. } 8cis90^\circ = \quad \text{ז. } 3cis270^\circ = \quad \text{ח. } cis180^\circ = \quad \text{ט. } cis0^\circ =$$

21. הפוך להצגה קוטבית:

$$\begin{array}{llllll} \text{א. } 1+i = & \text{ב. } \sqrt{3}-i = & \text{ג. } -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = & \text{ד. } 3+4i = & \text{ה. } 6i = & \text{ו. } -i = \\ \text{ז. } 4 = & \text{ח. } -1 = & \text{ט. } 1 = & \text{י. } 0 = & & \end{array}$$

22. חשב:

$$\text{א. } 2cis120^\circ \cdot 3cis60^\circ = \quad \text{ב. } cis210^\circ \cdot 5cis(-40^\circ) = \quad \text{ג. } \frac{12cis315^\circ}{3cis90^\circ} =$$

$$\text{ד. } \frac{1}{2cis40^\circ} = \quad \text{ה. } 6cis30^\circ + 2cis210^\circ =$$

23. נחון המספר המרוכב $z = Rcis\theta$. הבע באמצעות R ו- θ את המספרים:

$$\text{א. } \bar{z} = \quad \text{ב. } \frac{1}{z} = \quad \text{ג. } -z = \quad \text{ד. } -\frac{1}{\bar{z}} = \quad \text{ה. } iz = \quad \text{ו. } z \cdot \bar{z} =$$

24. הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

$$\text{א. } z + \bar{z} \quad \text{ב. } z \cdot \bar{z} \quad \text{ג. } \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$$

25. הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

$$\text{א. } z^2 - \bar{z}^2 \quad \text{ב. } \frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}$$

26. הוכח:

$$\text{א. } z - i\bar{z} = \overline{\bar{z} + iz} \quad \text{ב. } z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

27. מצא את קודקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{2}$ במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

28. ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קודקודיו האחרים.

29. משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי המשולש הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קודקודיו האחרים.

30. משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא 30° חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קודקוד הראש של המשולש הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קודקודיו האחרים.

31. z הוא מספר מרוכב במישור גאוס, שנמצא מחוץ למעגל היחידה. קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו:

$$\text{א. } \bar{z} \quad \text{ב. } \frac{1}{z} \quad \text{ג. } \frac{z}{\bar{z}} \quad \text{ד. } z \cdot \bar{z}$$

32. חשב:

$$\text{א. } (2cis30^\circ)^3 = \quad \text{ב. } (2cis14^\circ)^5 = \quad \text{ג. } (1+i)^4 = \quad \text{ד. } (\sqrt{3}-i)^3 =$$

$$\text{ה. } \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{15} =$$

33. פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } z^2 = 36 \operatorname{cis} 120^\circ \quad \text{ב. } z^4 = (9 \operatorname{cis} 80^\circ)^2 \quad \text{ג. } z^5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

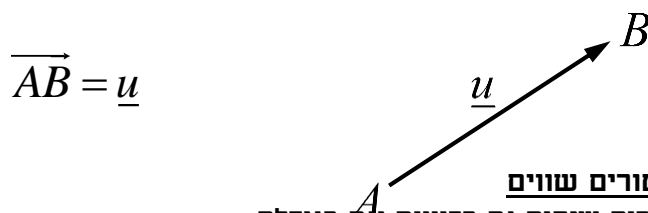
34. מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.
35. נתון המספר המרוכב $z = x + yi$. מצא את המקום הגיאומטרי במישור גאוס המתקבל עבור המשוואה: $|z| = 2$.
36. נתון המספר המרוכב $z = x + yi$. מצא את המקום הגיאומטרי במישור גאוס המתקבל עבור המשוואה: $|z - 3i| = 5$.
37. נתון המספר המרוכב $z = x + yi$. מצא את המקום הגיאומטרי במישור גאוס המתקבל עבור המשוואה: $|z + i| + |\bar{z} + i| = |1 + 3i|$.
38. בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא $a_7 = 13 + 3i$ והאיבר השלישי הוא $a_3 = 5 - 9i$. מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.
39. בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא $a_5 = 32 + 16i$ והאיבר השני הוא $a_2 = 2 - 4i$.
 א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.
 ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.
40. נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2. נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי $4i$ מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית.
 מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).
41. פתור את המשוואה: $z - \bar{z} + |z| = |2 - i|^2 - 4i + \operatorname{Im}(z)$
42. פתור את המשוואה: $|2 - 3^{x^2-x-1}i| = \sqrt{13}$
43. פתור את המשוואה: $z^3 = \bar{z}$
44. הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.
45. נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים מהורים. הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.
46. נתון מספר מרוכב z , שאינו ממשי טהור ואינו מדומה טהור. הוכח כי אם $z - \frac{1}{\bar{z}}$ ממשי אז z על מעגל היחידה.
47. הוכח את הנוסחה: $R_1 \operatorname{cis} \theta_1 \cdot R_2 \operatorname{cis} \theta_2 = R_1 R_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$
48. z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון. נתון: $|z^4 - z^3| = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$
 מצא את $\arg(z)$.
49. z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה. מצא את ערך הביטוי $z + iz$, אם ידוע שהוא ממשי.
50. z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה הבאה: $z^2 - 2 \cos \theta \cdot z + 1 = 0$. מצא את גודל הזווית $\angle z_1 O z_2$ (ראשית הצירים).

פתרונות:

1. א. i ב. $2i$ ג. $5i$ ד. $\sqrt{3}i$ ה. $\sqrt{5}i$ 2. א. i ב. -1 ג. $-i$ ד. 1 ה. i
 1. א. $a=2, b=5$ ב. $a=3, b=-1$ ג. $a=\frac{\sqrt{3}}{2}, b=-\frac{1}{2}$ ד. $a=0, b=7$
 ה. $a=-4, b=0$ ו. $a=0, b=0$ 4. א. $x=\pm i$ ב. $x=\pm 6i$ ג. $x=1+2i, 1-2i$
 5. $x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}$ 6. $z=2i, -3i$ 7. א. $7+i$ ב. $-3+5i$ ג. $16+11i$
 8. א. $2-5i$ ב. $3+i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ד. $-7i$ ה. -4 ו. 0 9. א. $-1+i$
 ב. $4+3i$ ג. $5+3i$ 10. $z=4-i$ 11. $z=4+5i$ 12. $z=2-3i, w=5+i$
 13. א. $a=5, b=-3$ ב. $a=2, b=-1$ 14. $z=-\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}i$ 15. א. $z=\pm(3-2i)$
 ב. $z=\pm(3+i)$ 16. $z_1=2, z_2=-4i$ 17. $z_1=-2-5i, z_2=3i$
 18. $z_1=-3i, z_2=2i$ 19. א. $m=-i$ ב. $m=-2i$ 20. א. $1+\sqrt{3}i$
 ב. $-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ ג. $2\sqrt{3}-2i$ ד. $2\sqrt{3}-2i$ ה. $8i$ ו. $-3i$ ז. -1 ח. -1
 ט. 1. א. $\sqrt{2}cis45^\circ$ ב. $2cis330^\circ$ ג. $cis240^\circ$ ד. $5cis3.13^\circ$ ה. $6cis90^\circ$
 ו. $cis270^\circ$ ז. $4cis0^\circ$ ח. $cis180^\circ$ ט. $cis0^\circ$ י. 0 22. א. -6 ב. $5cis170^\circ$
 ג. $4cis225^\circ$ ד. $\frac{1}{2}cis(-40^\circ)$ ה. $4cis30^\circ$ 23. א. $Rcis(-\theta)$ ב. $\frac{1}{R}cis(-\theta)$
 ג. $Rcis(180^\circ+\theta)$ ד. $\frac{1}{R}cis(180^\circ+\theta)$ ה. $Rcis(90^\circ+\theta)$ ו. R^2
 27. $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$ 28. $-\sqrt{3}+i, -1-\sqrt{3}i, \sqrt{3}-i$ 29. $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2$ 30.
 א. מחוץ למעגל. ב. בתוך המעגל. ג. על המעגל. $1+\sqrt{3}i, -1+\sqrt{3}i, 2$
 ד. מחוץ למעגל. 32. א. $8i$ ב. $32cis70^\circ$ ג. -4 ד. $-8i$ ה. 1
 33. א. $z_0=6cis60^\circ, z_1=6cis240^\circ$
 ב. $z_0=3cis40^\circ, z_1=3cis130^\circ, z_2=3cis220^\circ, z_3=3cis310^\circ$
 ג. $z_0=cis12^\circ, z_1=cis84^\circ, z_2=cis156^\circ, z_3=cis228^\circ, z_4=cis300^\circ$ 34. סכום: 0
 מכלפלה: -1 35. $x^2+y^2=4$ 36. $x^2+(y-3)^2=25$
 37. $\frac{2x^2}{3}+\frac{2y^2}{5}=1$ 38. $S_{10}=75-15i$ 39. א. $a_1=2+i, q=-2i$ ב. $S_5=20+25i$
 40. א. $2, 4-2i, 6-8i$ ב. $2, 2i, -2$ 41. $z_1=3-4i, z_2=-3-4i$ 42. $x=2, -1$
 43. $z_1=0, z_2=1, z_3=i, z_4=-1, z_5=-i$ 44. $z_1=0, z_2=i, z_3=-i, z_4=1, z_5=-1$ 48.
 49. $\arg(z)=30^\circ$ 50. $z+iz=\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ 2 θ

פרק 6 – וקטורים

6.1 – וקטורים גיאומטריים



$$\overrightarrow{AB} = \underline{u}$$

וקטורים מקבילים ווקטורים שווים

וקטורים שווים הם וקטורים שזהים גם בכיוונם וגם בגודלם.
וקטורים מקבילים הם וקטורים שזהים בכיוונם אך לא בהכרח בגודלם.
- במקרה זה ניתן להביע את האחד באמצעות השני על ידי כפל בסקלר.

- וקטורים מקבילים נקראים גם "וקטורים תלויים ליניארית".

- אם הוקטורים $\overrightarrow{AB} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{v} + \gamma \underline{w}$ ו- $\overrightarrow{CD} = a \underline{u} + b \underline{v} + c \underline{w}$ מקבילים מתקיים: $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$

וקטורים הפורשים מישור

כל שני וקטורים שאינם מקבילים, כלומר שהם בלתי תלויים, פורשים מישור.

קומבינציה ליניארית

כל וקטור שנמצא במישור (או שמקביל למישור) ניתן להצגה כקומבינציה ליניארית של שני הוקטורים הפורשים את המישור.

כל וקטור שהוא קומבינציה ליניארית של שני וקטורים הפורשים את מישור, מקביל למישור. אם ניתן להביע וקטור כקומבינציה ליניארית של שני וקטורים אחרים (או יותר) שלושת הוקטורים נקראים תלויים ליניארית.

המכפלה הסקלרית

המכפלה הסקלרית של שני וקטורים \underline{u} ו- \underline{v} מסומנת $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ומחושבת על פי הנוסחה:

$$\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$$

$$\text{או } \underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$$

$$|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u}^2}$$

$$\underline{u}^2 = |\underline{u}|^2$$

גודל של וקטור:

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

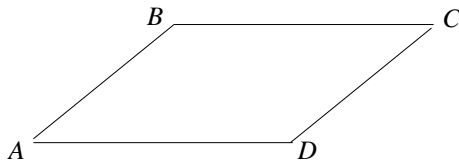
מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון

מהו וקטור, הצגה גיאומטרית של וקטור, סימון של וקטור ועל גודלו של וקטור		סרטון 1
	תרגיל 1	סרטון 2
	תרגיל 2	סרטון 3
הכרת הגופים השונים במרחב		סרטון 4
	תרגיל 3	סרטון 5
מהו סקלר, כפל וקטור בסקלר		סרטון 6
	תרגיל 4	סרטון 7
חיבור וחיסור וקטורים		סרטון 8
	תרגיל 5	סרטון 9
	תרגיל 6	סרטון 10
חלוקת קמע ביחס נתון	תרגיל 7	סרטון 11
	תרגיל 8	סרטון 12
	תרגיל 9	סרטון 13
	תרגיל 10	סרטון 14
	תרגיל 11	סרטון 15
	תרגיל 12	סרטון 16
וקטורים מקבילים ווקטורים שווים א'		סרטון 17
	תרגיל 13	סרטון 18
וקטורים מקבילים ווקטורים שווים ב'		סרטון 19
	תרגיל 14	סרטון 20
	תרגיל 15	סרטון 21
וקטורים הפורשים מישור, קומבינציה ליניארית		סרטון 22
	תרגיל 16	סרטון 23
	תרגיל 17	סרטון 24
יחידות ההצגה		סרטון 25
	תרגיל 18	סרטון 26
	תרגיל 19	סרטון 27
	תרגיל 20 א'	סרטון 28
	תרגיל 20 ב'	סרטון 29
	תרגיל 21 א' ב'	סרטון 30
	תרגיל 21 ג'	סרטון 31
המכפלה הסקלרית		סרטון 32
	תרגיל 22	סרטון 33
	תרגיל 23	סרטון 34
חישוב גודל של וקטור		סרטון 35
	תרגיל 24	סרטון 36
	תרגיל 25	סרטון 37
	תרגיל 26	סרטון 38
	תרגיל 27	סרטון 39
	תרגיל 28	סרטון 40
	תרגיל 29	סרטון 41
	תרגיל 30 א'	סרטון 42
	תרגיל 30 ב', ג'	סרטון 43
דרך א'	תרגיל 31	סרטון 44
דרך ב'	תרגיל 31	סרטון 45
	תרגיל 32	סרטון 46
	תרגיל 33	סרטון 47
	תרגיל 34	סרטון 48
	תרגיל 35	סרטון 49
	תרגיל 36	סרטון 50
	תרגיל 37 א'	סרטון 51
	תרגיל 37 ב'	סרטון 52
	תרגיל 37 ג'	סרטון 53
	תרגיל 38	סרטון 54

	סרטון 55	תרגיל 39
	סרטון 56	תרגיל 40

תרגילים:

1. במקבילית $ABCD$ נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$.
מצא את כל הוקטורים במקבילית ששווים ל- \underline{u} או \underline{v} .

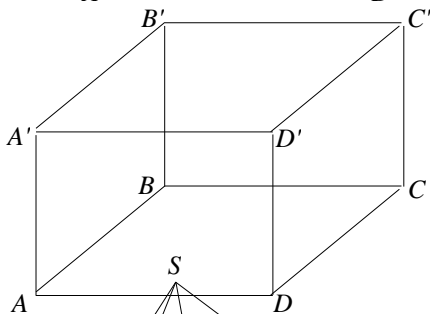


2. בחיבה $ABCD A' B' C' D'$ נתון:

$$\vec{AB} = \underline{u}, \vec{AD} = \underline{v}, \vec{AA'} = \underline{w}$$

מצא את כל הוקטורים בחיבה

ששווים ל- \underline{u} , \underline{v} או \underline{w} .

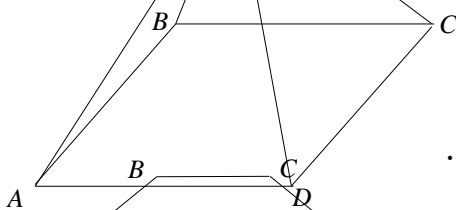


3. בפירמידה $SABCD$ שבסיסה ריבוע

$$\vec{AB} = \underline{u}, \vec{AD} = \underline{v}, \vec{AS} = \underline{w}$$

מצא את כל הוקטורים בפירמידה

ששווים ל- \underline{u} , \underline{v} או \underline{w} .



4. במרפז $ABCD$ שבשרטוט נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$.

מצא את כל הוקטורים במרפז שניתן להביעם באמצעות \underline{u} או \underline{v} .

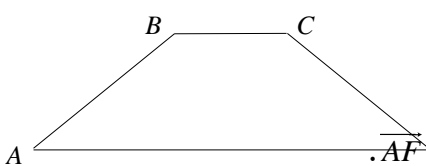
5. במרפז $ABCD$ שבשרטוט נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$.

א. הבע באמצעות \underline{u} ו- \underline{v} את הוקטורים \vec{AC} ו- \vec{DC} .

ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD . הבע

באמצעות \underline{u} ו- \underline{v} את הוקטור \vec{BE} .

ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD . הבע באמצעות \underline{u} ו- \underline{v} את הוקטור \vec{AF} .



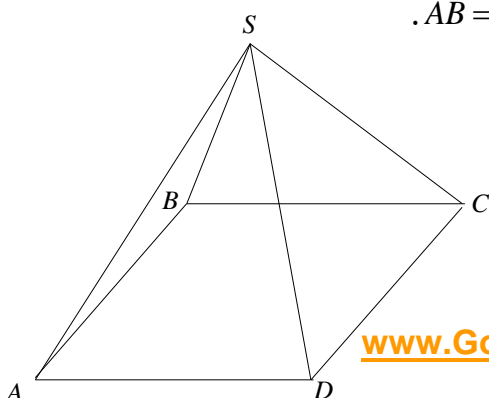
6. בפירמידה $SABCD$ שבסיסה ריבוע נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AS} = \underline{w}$.

א. הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} את הוקטורים \vec{AC} ו- \vec{SC} .

ב. הנקודה N היא אמצע המקצוע SD .

הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} את

הוקטור \vec{BN} .



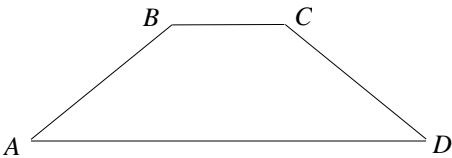
7. הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=2:3$. נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
הבע באמצעות \underline{u} את הוקטורים \overrightarrow{AP} ו- \overrightarrow{PB} .

8. הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=3:5$. נתון: $\overrightarrow{AP} = \underline{u}$.
הבע באמצעות \underline{u} את הוקטורים \overrightarrow{AB} ו- \overrightarrow{PB} .

9. הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{AB} = \alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
הבע באמצעות \underline{u} את הוקטורים \overrightarrow{AP} ו- \overrightarrow{PB} .

10. הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{PB} = \alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
הבע באמצעות \underline{u} את הוקטורים \overrightarrow{AP} ו- \overrightarrow{PB} .

11. במרפז $ABCD$ שבשרטוט נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$.
הנקודה F נמצאת על הצלע CD ומקיימת $\frac{DF}{FC} = \beta$.
הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- β את הוקטור \overrightarrow{AF} .



12. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$

ומקיימת $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$ והנקודה Q נמצאת על

המקצוע CC' ומקיימת $\frac{CQ}{QC'} = \beta$.

הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- α ו- β את הוקטור \overrightarrow{PQ} .

13. במרפז $ABCD$ שבשרטוט נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$.
הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD .

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת $\frac{AF}{FD} = \alpha$.

מצא את ערכו של α שעבורו מתקיים $\overrightarrow{FE} \parallel \overrightarrow{AB}$.

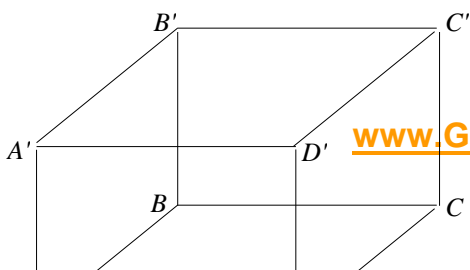
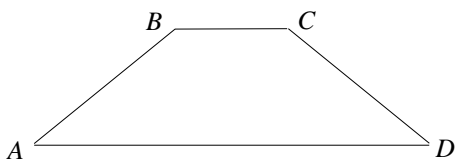
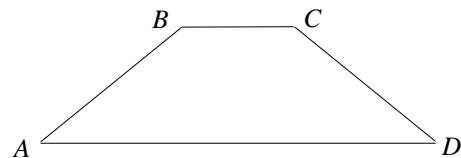
14. במרפז $ABCD$ שבשרטוט נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$.
הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD .

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת $\frac{AF}{FD} = \alpha$.

מצא את ערכו של α שעבורו מתקיים $\overrightarrow{FE} \parallel \overrightarrow{AC}$.

15. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$



ומקיימת $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$ והנקודה Q נמצאת על

המקצוע CC' ומקיימת $\frac{CQ}{QC'} = \beta$.

א. הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} , α ו- β את הוקטור \overrightarrow{PQ} .

ב. האם קיימים ערכי α ו- β שעבורם $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AC}$? נמק.

ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה $ABB'A'$. מצא את

ערכי α ו- β אם נתון כי $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{EC}$.

16. בחיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$

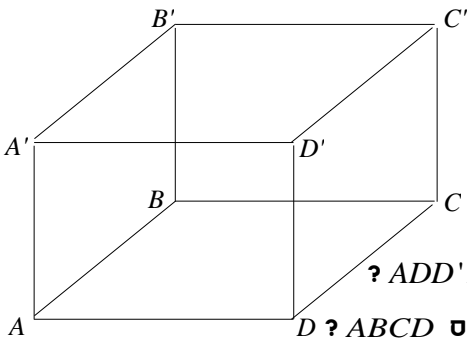
ומקיימת $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$ והנקודה Q נמצאת על

המקצוע CC' ומקיימת $\frac{CQ}{QC'} = \beta$.

א. הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} , α ו- β את הוקטור \overrightarrow{PQ} .

ב. מהו ערכו של α שעבורו הוקטור \overrightarrow{PQ} מקביל לפאה $ADD'A'$?

ג. האם קיים ערך של β שעבורו הוקטור \overrightarrow{PQ} מקביל לבסיס $ABCD$?



17. נתונה מנסרה משולשת $ABCA'B'C'$ ובה נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

הנקודה M נמצאת על המקצוע $A'C'$

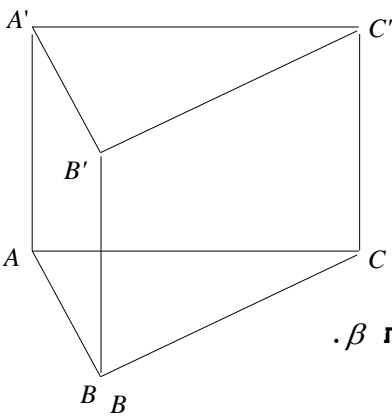
ומקיימת $\frac{A'M}{MC'} = \alpha$ והנקודה N נמצאת על

המקצוע BC ומקיימת $\frac{BN}{BC} = \beta$.

א. הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} , α ו- β את הוקטור \overrightarrow{NM} .

ב. מהו ערכו של β שעבורו הוקטור \overrightarrow{NM} מקביל לפאה $ACC'A'$?

ג. נתון כי הוקטור \overrightarrow{NM} מקביל לפאה $ABB'A'$. הבע את α באמצעות β .



18. במשולש $\triangle ABC$ הנקודה D היא אמצע הצלע BC

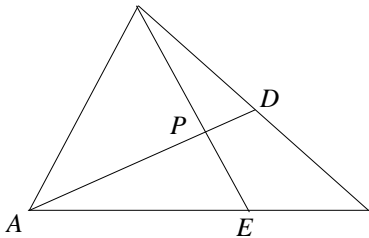
והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\frac{AE}{EC} = 2$.

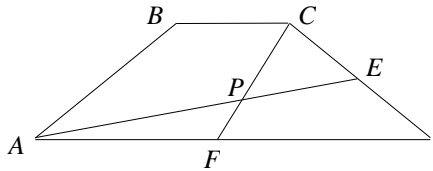
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו- BE .

נגדיר: $\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BP} = s \cdot \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$.

א. הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} , t ו- s את הוקטור \overrightarrow{AP} בשתי דרכים שונות.

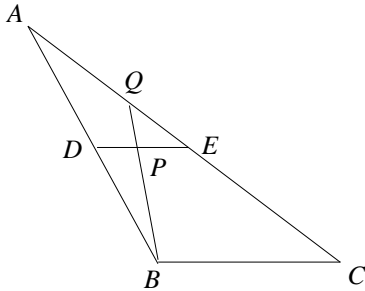
ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD ואת הקטע BE .





19. במרפז $ABCD$ שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$. הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD והנקודה F נמצאת באמצע הצלע AD . הנקודה P היא מפגש הקטעים AE ו- CF . מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AE ואת הקטע CF .

20. במשולש $\triangle ABC$ הנקודה D היא אמצע הצלע AB והנקודה E נמצאת על הצלע AC

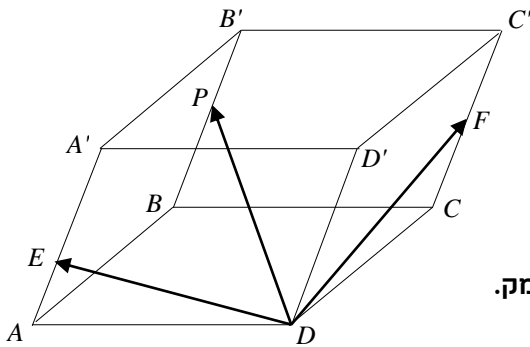


- כך שמתקיים: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. הנקודה P היא אמצע הקטע DE והמשך הקטע BP חותך את הצלע AC בנקודה Q .
א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה Q את הצלע AC .

ב. חשב את היחס $\frac{S_{\triangle QPE}}{S_{\triangle DPB}}$.

21. במקבילון $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overline{DA} = \underline{u}$, $\overline{DC} = \underline{v}$, $\overline{DD'} = \underline{w}$.

- הנקודה F נמצאת באמצע המקצוע CC' , הנקודה E נמצאת על המקצוע AA' ומקיימת $A'E = 2EA$ והנקודה P נמצאת על המקצוע BB' ומקיימת $\overline{B'P} = k \cdot \overline{B'B}$.
נתון: $\overline{DP} = t \cdot \overline{DE} + s \cdot \overline{DF}$.



- א. הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} , ו- \underline{w} את הוקטור \overline{DP} .
ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את המקצוע BB' .
ג. האם הנקודות D , E , F ו- P נמצאות על אותו מישור? נמק.

22. חשב את המכפלה הסקלרית של הוקטורים \underline{u} ו- \underline{v} על פי הנתונים על גודלם והזווית ביניהם:

- א. $\alpha = 60^\circ$, $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{u}| = 3$
ב. $\alpha = 120^\circ$, $|\underline{v}| = 5$, $|\underline{u}| = 4$
ג. $\alpha = 30^\circ$, $|\underline{v}| = 6$, $|\underline{u}| = 2$
ד. $\alpha = 180^\circ$, $|\underline{v}| = 3$, $|\underline{u}| = 8$
ה. $\alpha = 0^\circ$, $|\underline{v}| = 5$, $|\underline{u}| = 3$
ו. $\alpha = 90^\circ$, $|\underline{v}| = 4$, $|\underline{u}| = 7$

23. חשב את הזווית בין הוקטורים \underline{u} ו- \underline{v} על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

- א. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 6$, $|\underline{v}| = 4$, $|\underline{u}| = 3$
ב. $\underline{u} \cdot \underline{v} = -4\sqrt{3}$, $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{u}| = 4$
ג. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, $|\underline{v}| = 5$, $|\underline{u}| = 9$
ד. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 12$, $|\underline{v}| = 6$, $|\underline{u}| = 2$

24. נתונים שני וקטורים \underline{u} ו- \underline{v} שאורכיהם: $|\underline{u}| = 6$, $|\underline{v}| = 3$. הזווית ביניהם היא 120° .

חשב את גודלו של הוקטור \overrightarrow{PQ} שמוגדר $\overrightarrow{PQ} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

25. נתונים שני וקטורים \mathbf{u} ו- \mathbf{v} המאונכים זה לזה שאורכיהם: $|\mathbf{u}| = 4, |\mathbf{v}| = 5$.

חשב את גודלו של הוקטור \overrightarrow{MN} שמוגדר $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

26. נתונים שני וקטורים \mathbf{u} ו- \mathbf{v} שאורכיהם: $|\mathbf{u}| = 6, |\mathbf{v}| = 3$. הזווית ביניהם היא 120° .

חשב את גודל הזווית $\square QPM$ אם נתון: $\overrightarrow{PQ} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$, $\overrightarrow{PM} = 4\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

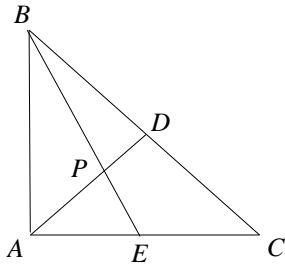
27. המשולש $\triangle ABC$ הוא משולש ישר זווית ($\square BAC = 90^\circ$).

הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC .

הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו- BE .

נתון: $AC = 12$, $AB = 8$, $\frac{AP}{PD} = 3$.

חשב את גודל הזווית $\square DPC$.



28. נתונה מנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה

צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6.

גובה המנסרה הוא 8.

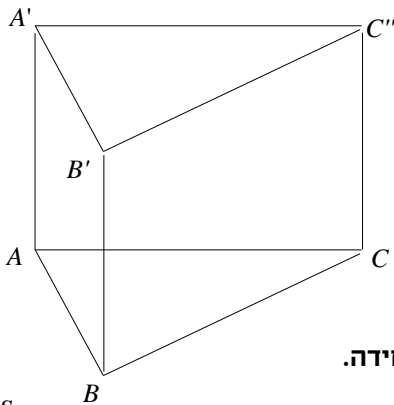
הנקודה M היא אמצע המקצוע $A'C'$

והנקודה N נמצאת על המקצוע BC

ומקיימת $BN = 2NC$.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{w}$.

חשב את גודל הזווית $\square MAN$.



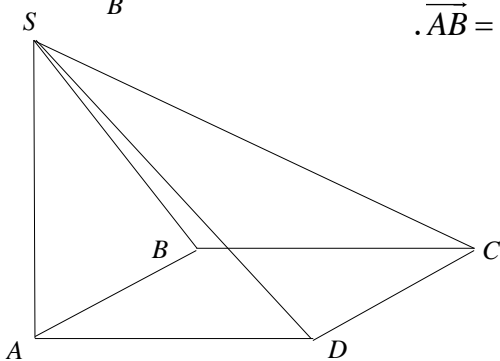
29. בפירמידה $SABCD$ שבסיסה ריבוע המקצוע SA הוא גובה הפירמידה.

נתון: $AB = AD = \frac{1}{2}AS = k$. נסמן: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{v}$, $\overrightarrow{AS} = \mathbf{w}$.

הנקודה Q היא אמצע המקצוע SC והנקודה P

היא אמצע המקצוע SB .

חשב את גודל הזווית $\square PAQ$.

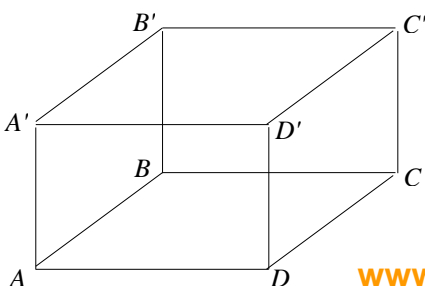


30. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{w}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{v}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$, $AB = \frac{1}{\sqrt{2}}AD = AA'$.

הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$

ומקיימת $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$ והנקודה Q היא

אמצע המקצוע DD' .



א. מהו ערכו של α שעבורו מתקיים $|\overrightarrow{AP}| = \frac{5}{6} |\overrightarrow{AQ}|$?

ב. הבע באמצעות α את $\cos \angle PAQ$ והראה כי לכל ערך של α הזווית $\angle PAQ$ חדה.

ג. מהו ערכו של α שעבורו הזווית $\angle PAQ$ מקיימת $\cos \angle PAQ = \frac{2}{3\sqrt{5}}$?

31. הוכח כי בכל מרובע $ABCD$ מתקיים: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$

32. נתון מלבן $ABCD$. הוכח כי לכל נקודה כלשהי P מתקיים: $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD}$

33. נתון ריבוע $ABCD$. הנקודה P היא אמצע הצלע BC והנקודה Q היא אמצע הצלע CD

הוכח כי מתקיים: $S_{ABCD} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$

34. נתון מרובע $ABCD$. הנקודה P היא אמצע הצלע AB והנקודה Q היא אמצע הצלע CD

הוכח כי מתקיים: $\overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}}{2}$

35. נתונה פירמידה משולשת $SABC$ שבה $\overrightarrow{AS} \perp \overrightarrow{BC}$ ו- $\overrightarrow{BS} \perp \overrightarrow{AC}$. הוכח: $\overrightarrow{CS} \perp \overrightarrow{AB}$

36. הוכח: וקטור המאונך לשני וקטורים בלתי תלויים במישור מאונך לכל הוקטורים במישור.

37. א. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש $\triangle ABC$.

הוכח: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$

ב. נתונה פירמידה משולשת $SABC$. הנקודה P היא מפגש התיכונים בפאה SBC .

הוכח: $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AS})$

ג. נתון בנוסף כי \overrightarrow{AS} ו- \overrightarrow{AP} מאונכים ל- \overrightarrow{BC} .

הוכח כי $AB = AC$ (הדרכה: סמן $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$)

38. הנקודה P נמצאת בתוך מרובע כלשהו $ABCD$

כך שהמשולשים $\triangle APD$ ו- $\triangle BPC$ הם משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים ($AP = PD$, $BP = PC$).

הנקודה E היא אמצע הצלע CD .

הוכח: $\overrightarrow{PE} \perp \overrightarrow{AB}$

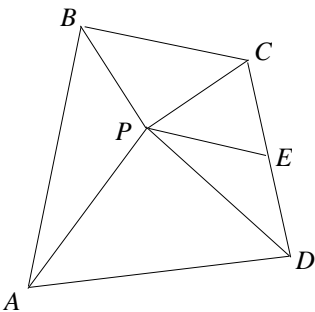
(הדרכה: סמן $\overrightarrow{PB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{PC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{PA} = \underline{c}$, $\overrightarrow{PD} = \underline{d}$)

39. בטטראדר $SABC$ נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$

הנקודה P נמצאת על המקצוע AS ומקיימת: $\overrightarrow{AP} = \alpha \cdot \overrightarrow{AS}$

הנקודה Q נמצאת על הפאה SBC ומקיימת: $\overrightarrow{SQ} = \beta \cdot (\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$

א. מצא את הקשר בין α ו- β שעבורו \overrightarrow{PQ} מקביל למישור ABC .



$$\overline{PQ} \perp \overline{BC}, \alpha = \beta = \frac{1}{3}$$

הוכח: $AB = AC$

40. נחונה פירמידה שבסיסה מלבן. הוכח כי אם שלושה מקצועות צדדיים בה שווים אז גם המקצוע הצדדי הרביעי שווה להם.

פתרונות:

$$.1 \quad \underline{u} = \overline{DC}, \underline{v} = \overline{BC} \quad .2 \quad \underline{u} = \overline{DC} = \overline{D'C'} = \overline{A'B'} = \overline{AB}, \underline{v} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{A'D'} = \overline{B'C'}$$

$$.3 \quad \underline{u} = \overline{DC} = \overline{AB}, \underline{v} = \overline{AD} = \overline{BC}, \underline{w} = \overline{AS} \quad .4 \quad \underline{w} = \overline{AA'} = \overline{DD'} = \overline{CC'} = \overline{BB'}$$

$$.5 \quad \overline{BC} = \frac{1}{3}\underline{v} \quad .6 \quad \overline{AC} = \underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}, \overline{DC} = \underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} \quad .7 \quad \overline{BE} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$$

$$.8 \quad \overline{AF} = \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{u} \quad .9 \quad \overline{AC} = \underline{v} + \underline{u}, \overline{SC} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w} \quad .10 \quad \overline{BN} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$$

$$.11 \quad \overline{AP} = \frac{2}{5}\underline{u}, \overline{BP} = \frac{3}{5}\underline{u} \quad .12 \quad \overline{AB} = \frac{8}{3}\underline{u}, \overline{PB} = \frac{5}{3}\underline{u} \quad .13 \quad \overline{AP} = \alpha \underline{u}, \overline{PB} = (1-\alpha)\underline{u}$$

$$.14 \quad \overline{AF} = \frac{\beta}{1+\beta}\underline{u} + \frac{3+\beta}{3+3\beta}\underline{v} \quad .15 \quad \overline{AP} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\underline{u}, \overline{PB} = \frac{1}{1+\alpha}\underline{u}$$

$$.16 \quad \overline{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} + \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad .17 \quad \overline{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w}$$

$$.18 \quad \overline{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad .19 \quad \overline{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w}$$

$$.20 \quad \overline{NM} = (\beta-1)\underline{u} + \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} - \beta\right)\underline{v} + \underline{w} \quad .21 \quad \alpha = \frac{\beta}{1-\beta}$$

$$.22 \quad \overline{AP} = \frac{1}{2}t\underline{u} + \frac{1}{2}t\underline{v}, \overline{AP} = (1-s)\underline{u} + \frac{2}{3}s\underline{v} \quad .23 \quad \alpha = 1$$

$$.24 \quad \overline{AP} = \frac{1}{2}t\underline{u} + \frac{1}{2}t\underline{v}, \overline{AP} = (1-s)\underline{u} + \frac{2}{3}s\underline{v} \quad .25 \quad \overline{AP} = \frac{1}{2}t\underline{u} + \frac{1}{2}t\underline{v}, \overline{AP} = (1-s)\underline{u} + \frac{2}{3}s\underline{v}$$

$$.26 \quad \overline{CF} : \overline{PF} = 2 : 1 \quad .27 \quad \overline{AQ} : \overline{QC} = 1 : 2 \quad .28 \quad \frac{S_{QPE}}{S_{DPB}} = \frac{1}{3}$$

$$.29 \quad \overline{DP} = \underline{u} + \underline{v} + (1-k)\underline{w} \quad .30 \quad \overline{B'P} : \overline{PB} = 1 : 5$$

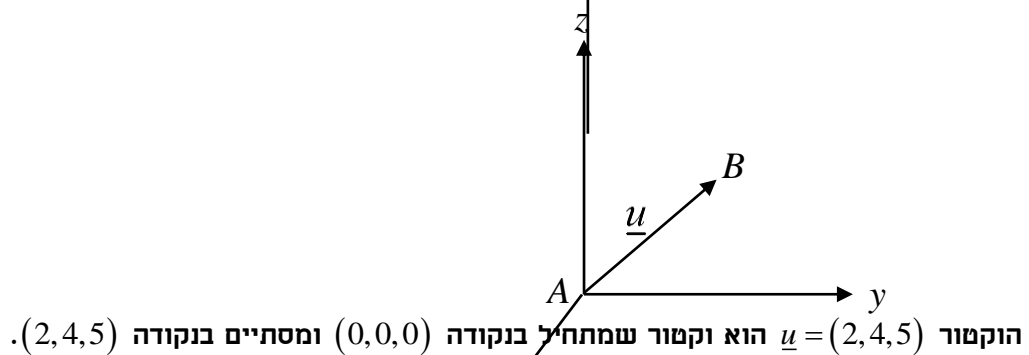
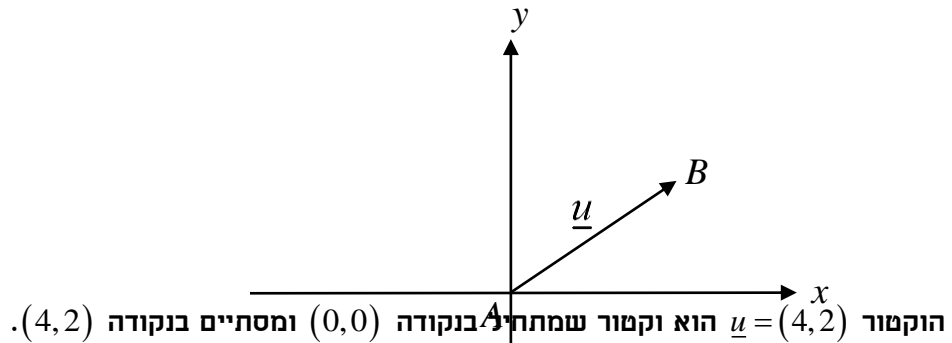
$$.31 \quad \overline{MN} = \sqrt{29} \quad .32 \quad \overline{PQ} = 18.248$$

$$.33 \quad \overline{MN} = \sqrt{29} \quad .34 \quad \overline{PQ} = 18.248$$

$$.35 \quad \cos(PAQ) = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{1+\alpha^2}} \quad .36 \quad \alpha = \frac{3}{4}$$

$$.37 \quad \alpha + 2\beta = 1$$

6.2 - הוקטור האלגברי



אמצע קטע

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

חלוקת קטע ביחס נתון

$$x_P = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k+l}, \quad y_P = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k+l}, \quad z_P = \frac{k \cdot z_1 + l \cdot z_2}{k+l}$$

מכפלה סקלרית

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha \quad : \underline{v} \text{ ו-} \underline{u} \text{ וקטורים שני וקטורים}$$

גודל של וקטור

$$|\underline{u}| = \sqrt{u^2} \quad \left| \quad |\underline{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \right|$$

וקטורים מקבילים ווקטורים שווים

וקטורים שווים הם וקטורים שזהים גם בכיוונם וגם בגודלם.
 וקטורים מקבילים הם וקטורים שזהים בכיוונם אך לא בהכרח בגודלם.
 במקרה זה ניתן להביע את האחד באמצעות השני על ידי כפל בסקלר.
 וקטורים (אלגוריתם) שנשמר אותו יחס בין שיעוריהם מקבילים זה לזה.

חישוב זווית בין וקטורים בעזרת המכפלה הסקלרית

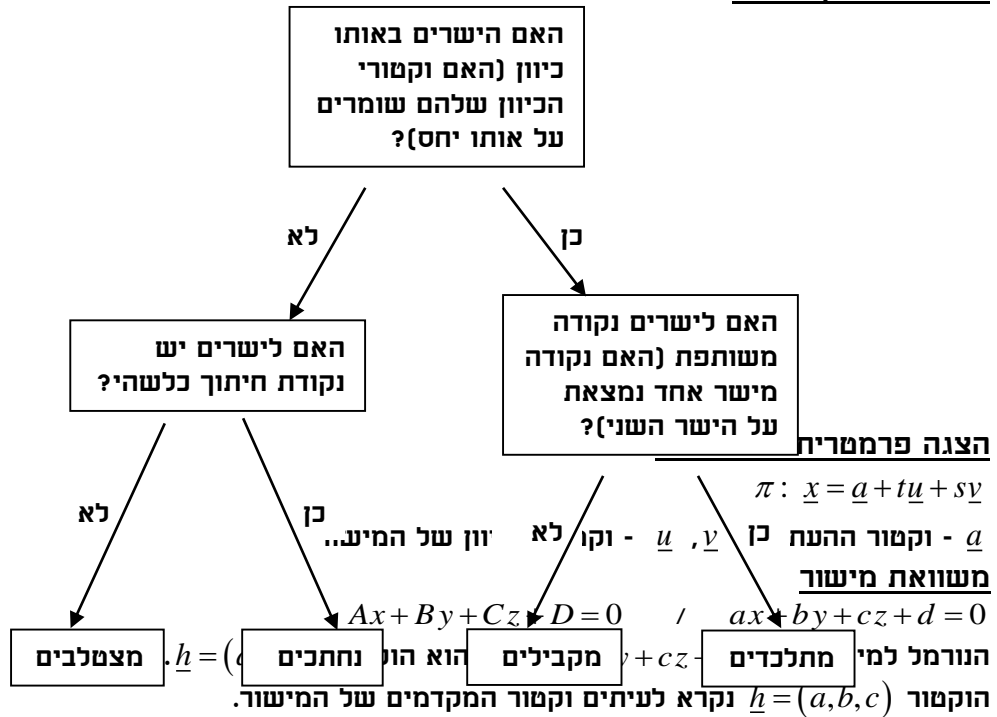
$$\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|} \quad \Rightarrow \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$$

הצגה פרמטרית של ישר

$\ell: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$

\underline{a} - וקטור ההעתקה, \underline{u} - וקטור הכיוון של הישר

מצב הדדי בין ישרים



הצגה פרמטרית

$\pi: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

\underline{a} - וקטור ההעתך

משוואת מישור

$ax + by + cz + d = 0$

הנורמל למי $\underline{h} = (a, b, c)$

מצב הדדי בין ישר למישור

מציבים נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ואז:
 אם יש פתרון יחיד למשוואה - הישר חותך את המישור
 אם אין פתרון למשוואה - הישר מקביל למישור
 אם יש אינסוף פתרונות למשוואה - הישר מוכל במישור

מצב הדדי בין מישורים

נחונים שני מישורים:

$\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

המצב הדדי ביניהם הוא:

נחתכים	מקבילים	מתלכדים
אחרת	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$

זוויות

בין וקטורים - $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$

בין ישרים - $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$ (\underline{u} ו- \underline{v} הם וקטורי הכיוון של הישרים)

בין ישר למישור - $\sin \alpha = \frac{|\underline{u} \cdot \underline{h}|}{|\underline{u}| \cdot |\underline{h}|}$ (\underline{u} הוא וקטור הכיוון של הישרו- \underline{h} הוא הנורמל למישור)

בין מישורים - $\cos \alpha = \frac{|\underline{h}_1 \cdot \underline{h}_2|}{|\underline{h}_1| \cdot |\underline{h}_2|}$ (\underline{h}_1 ו- \underline{h}_2 הם הנורמלים של שני המישורים)

מרחקים

1. בין נקודות - גודל וקטור או על פי הנוסחה: $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

2. בין נקודה לישר – ניסוח האנך מהנקודה לישר והשוואת מכפלתו בוקטור הכיוון לאפס

$$3. \text{ בין נקודה למישור – על פי הנוסחה: } d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

4. בין ישרים מקבילים – שימוש בנקודה מאחד הישרים ואז כמו 2

5. בין ישר ומישור (מקבילים) – שימוש בנקודה מהישר ואז כמו 3

6. בין מישורים מקבילים – שימוש בנקודה מאחד המישורים ואז כמו 3 או על פי הנוסחה:

$$d = \left| \frac{D_1 - D_2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

7. בין ישרים מצטלבים – ניסוח מישור שמכיל את אחד הישרים ומקביל לשני ואז כמו 5

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
1		הכרת הוקטור האלגברי (בדו מימד)
2	תרגיל 1	
3		הכרת מערכת הצירים התלת מימדית והוקטור האלגברי בתלת מימד
4	תרגיל 2	
5		מערכת הצירים התלת מימדית – המשך
6	תרגיל 3	הסבר על אמצע קטע בתלת מימד
7	תרגיל 4	
8	תרגיל 5	הסבר על חלוקת קטע ביחס נתון בתלת מימד
9		חישוב וקטור שמוצאו לא בראשית הצירים
10	תרגיל 6	
11	תרגיל 7	
12	תרגיל 8	
13	תרגיל 9	
14	תרגיל 10	פעולות חשבון בוקטורים אלגבריים (חיבור, חיסור, כפל בסקלר, מכפלה סקלרית)
15		חישוב וקטור שמוצאו לא בראשית שצירים – המשך
16	תרגיל 11	הסבר על חישוב גודל של וקטור
17	תרגיל 12	
18		וקטורים מקבילים ווקטורים ישירים
19	תרגיל 13	
20	תרגיל 14	הסבר על חישוב זווית בין וקטורים
21	תרגיל 15	
22	תרגיל 16	
23	תרגיל 17	
24		הצגה פרמטרית של ישר
25	תרגיל 18	
26	תרגיל 19	
27	תרגיל 20	
28	תרגיל 21	
29	תרגיל 22	
30	תרגיל 23	
31	תרגיל 24	
32	תרגיל 25	
33		האפשרויות של מצב הדדי בין ישרים
34		זיהוי המצב ההדדי בין שני ישרים
35	תרגיל 26	
36	תרגיל 27	

	37	סרטון 37
	38	סרטון 38
	39	סרטון 39
	40	סרטון 40
	41	סרטון 41
	42	סרטון 42
	43	סרטון 43
	44	סרטון 44
	45	סרטון 45
	46	סרטון 46
	47	סרטון 47
	48	סרטון 48
	49	סרטון 49
	50	סרטון 50
	51	סרטון 51
	52	סרטון 52
	53	סרטון 53
	54	סרטון 54
	55	סרטון 55
	56	סרטון 56
	57	סרטון 57
	58	סרטון 58
	59	סרטון 59
	60	סרטון 60
	61	סרטון 61
	62	סרטון 62
	63	סרטון 63
	64	סרטון 64
	65	סרטון 65
	66	סרטון 66
	67	סרטון 67
	68	סרטון 68
	69	סרטון 69
	70	סרטון 70
	71	סרטון 71
	72	סרטון 72
	73	סרטון 73
	74	סרטון 74
	75	סרטון 75
	76	סרטון 76
	77	סרטון 77
	78	סרטון 78
	79	סרטון 79
	80	סרטון 80
	81	סרטון 81
	82	סרטון 82
	83	סרטון 83
	84	סרטון 84
	85	סרטון 85
	86	סרטון 86

	70 תרגיל	87 סרטון
זוויות		88 סרטון
זווית בין ישרים	71 תרגיל	89 סרטון
זווית בין ישר למישור	72 תרגיל	90 סרטון
	73 תרגיל	91 סרטון
זווית בין מישורים	74 תרגיל	92 סרטון
	75 תרגיל	93 סרטון
מרחקים		94 סרטון
מרחק בין שתי נקודות	76 תרגיל	95 סרטון
מרחק בין נקודה לישר	77 תרגיל	96 סרטון
	78 תרגיל	97 סרטון
	79 תרגיל	98 סרטון
	80 תרגיל	99 סרטון
מרחק בין נקודה למישור	81 תרגיל	100 סרטון
	82 תרגיל	101 סרטון
	83 תרגיל	102 סרטון
	84 תרגיל	103 סרטון
	85 תרגיל	104 סרטון
	86 תרגיל	105 סרטון
מרחק בין ישרים מקבילים	87 תרגיל	106 סרטון
מרחק בין ישר למישור (מקבילים)	88 תרגיל	107 סרטון
מרחק בין מישורים מקבילים	89 תרגיל	108 סרטון
	90 תרגיל	109 סרטון
	91 תרגיל	110 סרטון
מרחק בין ישרים מצטלבים	92 תרגיל	111 סרטון
	93 תרגיל	112 סרטון
	94 תרגיל	113 סרטון
מרחקים – סיכום		114 סרטון
	95 תרגיל	115 סרטון
דרך א'	96 תרגיל	116 סרטון
דרך ב'	96 תרגיל	117 סרטון
	97 תרגיל	118 סרטון
חלק א'	98 תרגיל	119 סרטון
חלק ב'	98 תרגיל	120 סרטון

	תרגיל 99	סרטון 121
	תרגיל 100	סרטון 122
	תרגיל 101	סרטון 123
	תרגיל 102	סרטון 124
חלק א'	תרגיל 103	סרטון 125
חלק ב'	תרגיל 103	סרטון 126

תרגילים:

1. שרטט את הוקטורים הבאים על מערכת צירים:

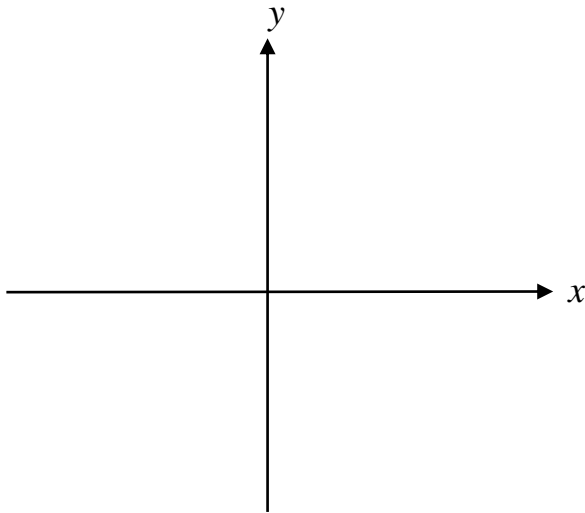
א. $\underline{u} = (4, 2)$

ב. $\underline{v} = (-5, 1)$

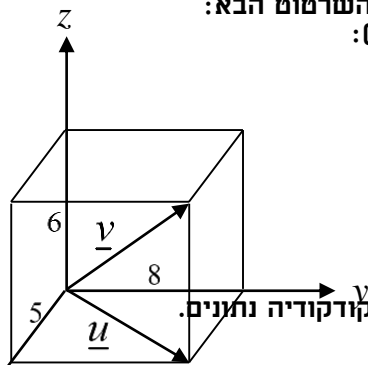
ג. $\underline{w} = (3, -4)$

ד. $\underline{a} = (0, 3)$

ה. $\underline{b} = (-5, 0)$

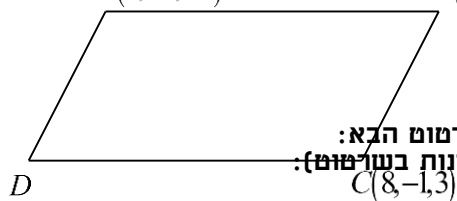


2. מצא מהו הוקטור \underline{u} ומהו הוקטור \underline{v} על פי השרטוט הבא: (נתונה תיבה. מידות התיבה מצוינות בשרטוט):

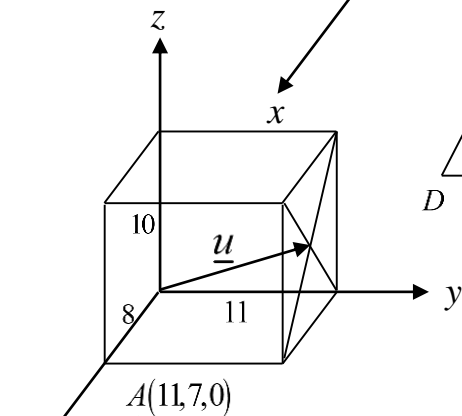


3. בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקדיה נתונים. מצא את שיעורי הקודקוד D .

$A(3, -6, -2)$ $B(5, 1, 0)$

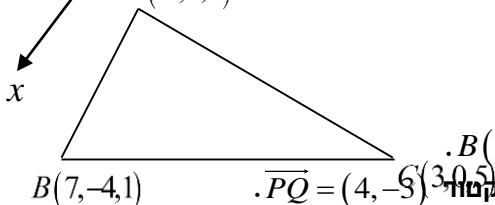


4. מצא מהו הוקטור \underline{u} על פי השרטוט הבא: (נתונה תיבה. מידות התיבה מצוינות בשרטוט):



$A(11, 7, 0)$

5. בשרטוט נתון משולש ששיעורי קודקדיו נתונים. מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.



6. א. מצא את הוקטור \overline{AB} אם נתונות הנקודות $A(-3, 5)$ ו- $B(6, 1)$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה Q אם נתונה הנקודה $P(8, 11)$ והוקטור $\overline{PQ} = (4, -3)$.

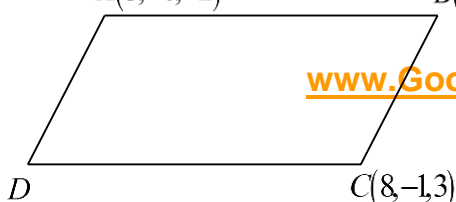
7. א. מצא את הוקטור \overline{EF} אם נתונות הנקודות $E(2, 0, -3)$ ו- $F(7, -1, -3)$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה N אם נתונה הנקודה $M(0, -4, 1)$ והוקטור

$\overline{MN} = (-1, -1, 9)$

8. בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקדיה נתונים.

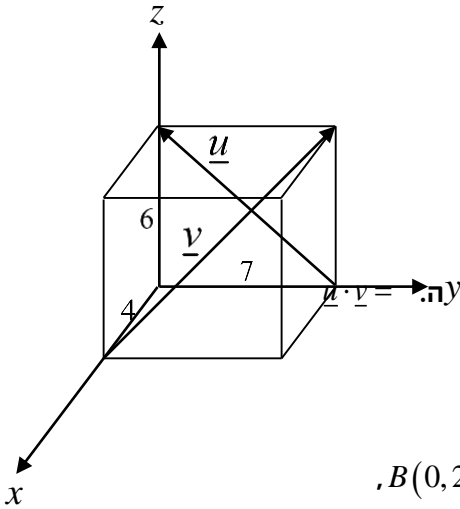
$A(3, -6, -2)$ $B(5, 1, 0)$



לפתרון מלא בסרטון פלאש היכנסו ל- www.Gool.co.il

כתב ופתר - גיא סלומון ©

מצא את שיעורי הקודקוד D .



9. מצא מהו הוקטור \underline{u} ומהו הוקטור \underline{v} על פי השרטוט הבא: (נתונה תיבה. מידות התיבה מצוינות בשרטוט):

10. נתונים שני וקטורים: $\underline{u} = (3, 7, 1)$, $\underline{v} = (2, -3, 5)$. חשב:

א. $\underline{u} + \underline{v} =$ ב. $\underline{u} - \underline{v} =$ ג. $2\underline{u} =$ ד. $3\underline{u} - \underline{v} =$

11. חשב את גודלו של הוקטור $\underline{u} = (1, -2, 4)$.

12. נתונים ארבעת קודקודי המרובע $ABCD$: $A(-4, 2, 1)$, $B(0, 2, -1)$,

$C(-3, -5, 0)$, $D(-7, -5, 2)$. הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

13. נתונים ארבעת קודקודי המרובע $ABCD$: $A(1, 2, 0)$, $B(-2, 5, 3)$, $C(-1, 8, 4)$,

$D(4, 3, -1)$.

א. הוכח כי המרובע הוא מרפז.

ב. האם המרפז שווה שוקיים?

14. חשב את הזווית בין הוקטורים $\underline{u} = (3, 7, 1)$ ו- $\underline{v} = (2, -3, 5)$:

15. חשב את הזווית בין הוקטורים \underline{u} ו- \underline{v} :

א. $\underline{u} = (-2, 2, 5)$, $\underline{v} = (4, 0, 1)$

ב. $\underline{u} = (6, -3, 1)$, $\underline{v} = (2, 5, 3)$

ג. $\underline{u} = (-2, 1, 3)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$

16. מצא את שטחו של משולש $\triangle ABC$ ששיעורי קודקודיו הם: $A(-3, 2, 1)$, $B(0, 3, 2)$,

$C(5, -1, 0)$.

17. נתונים הוקטורים: $\underline{u} = (2, -1, 0)$, $\underline{v} = (5, 0, 3)$.

מצא וקטור \underline{w} שמכפלתו ב- \underline{u} היא 0 ומכפלתו ב- \underline{v} היא 0 אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

18. האם הנקודה $A(7, 0, 3)$ נמצאת על הישר $\underline{x} = (4, 3, 0) + t(1, -1, 1)$?

19. האם הנקודה $B(4, -2, -10)$ נמצאת על הישר $\underline{x} = t(2, -1, 5)$?

20. מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5, -2)$ ו- $B(1, 6)$.

21. מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3, 0, -2)$ ו- $D(4, 1, 1)$.

22. מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2, -7, 1)$ ומקביל

לישר $\underline{x} = (0, 3, -1) + t(-4, 2, 1)$.

23. מצא את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- y במרחב.

24. מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3, -1, 4)$ ומקביל לציר ה- z .

25. מצא את נקודת החיתוך של הישר $\ell: \underline{x} = (1, -2, 6) + t(-2, 1, 2)$ עם המישור $[xy]$.

26. מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_1: \underline{x} = (2, -3, 0) + t(5, -1, 2)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (12, -5, 4) + s(-10, 2, -4)$$

27. מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_3: \underline{x} = (0, 1, -7) + t(-2, 1, 1)$$

$$\ell_4: \underline{x} = (2, 0, -6) + s(6, -3, -3)$$

28. מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_5: \underline{x} = (-3, 5, 1) + t(4, 0, -1)$$

$$\ell_6: \underline{x} = (-1, 7, 4) + s(-1, 1, 2)$$

29. מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_7: \underline{x} = (3, 0, 0) + t(2, -2, 5)$$

$$\ell_8: \underline{x} = (0, 1, -5) + s(3, 1, -2)$$

30. מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_9: \underline{x} = (-4, 1, -1) + t(3, 0, -1)$$

$$\ell_{10}: \underline{x} = s(6, 0, -2)$$

31. מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_{11}: \underline{x} = (2, 8, -1) + t(1, 0, 0)$$

$$\ell_{12}: \underline{x} = (-5, 8, 2) + s(2, 0, -1)$$

32. מצא את ערכו של הפרמטר k שעבורו הישרים הבאים:
א. מקבילים
ב. מחלכדים

$$\ell_1: \underline{x} = (k+1, 1-k, 6) + t(1, -2, 2)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (k-1, 7, -k) + s(1-k^2, k^2+2, -6)$$

33. נתונות הנקודות: $A(3, -1, 5)$, $B(k, -1, 3)$, $C(-6, 3, -1)$, $D(-2, 3, k)$. הראה כי לכל ערך של k הישרים ℓ_{AB} ו- ℓ_{CD} מצטלבים.

34. מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות $A(1, -4, 0)$, $B(3, 6, 2)$ ו- $C(0, -3, 1)$.

35. מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6, 7, -1)$ ומכיל את הישר $\ell: \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4)$.

36. נתונים שני ישרים:

$$\ell_1: \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3)$$

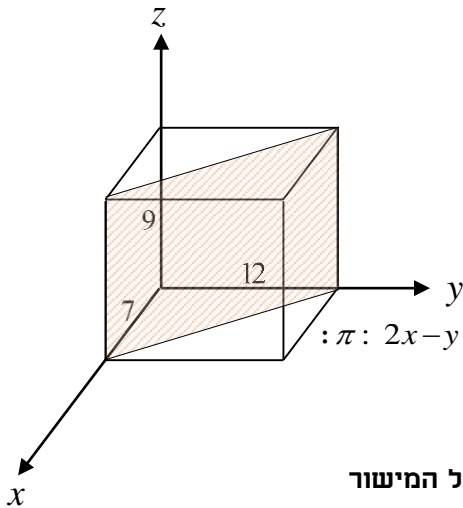
$$\ell_2: \underline{x} = (2, 16, 11) + s(0, 1, -6)$$

הראה שהישרים נחתכים ומצא הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

37. מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5, -2, -1)$ ומכיל את ציר ה- x .

38. מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.

39. מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו שבשרטוט הבא: (נתונה תיבה. מידות התיבה מצוינות בשרטוט):



40. קבע האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi: 2x - y + 3z - 6 = 0$

א. $D(5, 7, 1)$

ב. $E(2, -1, 1)$

41. מצא את ערכו של k שעבורו הנקודה $A(1, k, -1)$ נמצאת על המישור $\pi: kx - 2y + (k+1)z + 7 = 0$.

42. נתונה משוואת מישור: $\pi: 3x + 2y - z - 9 = 0$. מצא את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

43. נתונה משוואת מישור: $\pi: 4x + y - 2z + 8 = 0$.

מצא הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

44. נתונה משוואת מישור: $\pi: x + 4y - z + 8 = 0$. כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

45. נתונה משוואת מישור: $\pi: 2x + 3z - 12 = 0$. כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

46. נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi: \underline{x} = (2, -5, 0) + t(1, 0, 2) + s(0, -1, 3)$. מצא את משוואת המישור.

47. נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi: \underline{x} = t(-2, 2, 1) + s(3, 1, 0)$. מצא את משוואת המישור.

48. המישור π עובר בנקודות: $A(1, 0, -3)$, $B(2, 0, 0)$, $C(4, -1, 0)$. מצא את משוואת המישור.

49. נתונים שני ישרים:

$$\ell_1: \underline{x} = (5, -4, 1) + t(0, 2, -1)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (0, -6, 2) + s(0, -2, 1)$$

הראה שהישרים מקבילים ומצא את משוואת המישור המכיל אותם.

50. נתונים שני ישרים:

$$\ell_1: \underline{x} = (-1, 1, 3) + t(3, -2, 4)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (-7, 1, 0) + s(4, -3, 0)$$

הראה שהישרים מצטלבים ומצא את משוואת המישור המכיל את הישר ℓ_1 ומקביל לישר ℓ_2 .

51. מצא משוואת מישור שעובר בנקודה $A(6, 0, -1)$ ומכיל את ציר ה- z .

52. נתונה משוואת מישור: $\pi: (k+2)x + (k^2 - 2k - 3)y - 3z + k^2 - 1 = 0$. עבור איזה ערך של k המישור מקביל לציר ה- y (ולא מכיל אותו)?

53. פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0$, $y=0$, $z=0$ ו- $x+3y+2z-6=0$. מצא את נפח הטטראדר.

54. נתונים ישר ומישור. קבע את המצב ההדדי ביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך:

$$\ell: \underline{x} = (5, 0, 1) + t(4, 1, -2)$$

$$\pi: 2x - y - 3z + 6 = 0$$

55. נתונים ישר ומישור. קבע את המצב ההדדי ביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך:

$$\ell: \underline{x} = (2, -1, 6) + t(-1, 1, 2)$$

$$\pi: x - 3y + 2z - 11 = 0$$

56. נתונים ישר ומישור. קבע את המצב ההדדי ביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך:

$$\ell: \underline{x} = (-6, 1, 0) + t(3, 0, -1)$$

$$\pi: 2x + y + 6z + 11 = 0$$

57. נתונים ישר ומישור. קבע את המצב ההדדי ביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך:

$$\ell: \underline{x} = (0, 3, -2) + t(1, -1, 2)$$

$$\pi: \underline{x} = (-1, 0, 2) + s(1, 0, -2) + r(3, 0, -1)$$

58. נתונים ישר ומישור:

$$\ell: \underline{x} = (1, a, 3) + t(4, 1 - b, 0)$$

$$\pi: 2x - y + z - 4 = 0$$

מצא את ערכי a ו- b עבורם הישר מוכל במישור.

59. נתונים שני מישורים:

$$\pi_1: x - 3y + 2z - 1 = 0$$

$$\pi_2: 4x + y - z - 6 = 0$$

מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

60. נתונים שני מישורים. קבע את המצב ההדדי ביניהם:

$$\pi_1: 2x - y + 4z - 5 = 0 \quad \text{א.}$$

$$\pi_2: 4x - 2y + 8z - 10 = 0$$

$$\pi_3: x+3y-z+1=0 \quad \text{ב.}$$

$$\pi_4: 3x+9y-3z-8=0$$

$$\pi_5: 5x-2y-z+3=0 \quad \text{ג.}$$

$$\pi_6: 2x+3y+z-5=0$$

61. נחונים שני מישורים:

$$\pi_1: 2x+(k^2+k)y-2z+1=0$$

$$\pi_2: 4x+12y-4z+k^2-2=0$$

מצא את ערכי k עבורם המישורים: א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים

62. במקבילון $ABCD A'B'C'D'$ נתונים שלושה קודקודים: $A(1,-1,4)$, $B(9,0,2)$, $C(5,2,-2)$

מצא את משוואת המישור עליו מונחת הפאה $A'B'C'D'$ אם ידוע שהנקודה $(2,-1,0)$ נמצאת עליו.

63. נחונים שני מישורים נחתכים:

$$\pi_1: 4x+y-2z+2=0$$

$$\pi_2: 2x-y+z+10=0$$

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך בין המישורים.

64. נחונים שני מישורים נחתכים:

$$\pi_3: 8x+2y-3z+2=0$$

$$\pi_4: 2x-3y+z+4=0$$

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך בין המישורים.

65. נחונים שני מישורים נחתכים:

$$\pi_5: 3x-3y+z+2=0$$

$$\pi_6: 5x-2z+20=0$$

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך בין המישורים.

66. נחונים שני מישורים נחתכים:

$$\pi_7: x-2y-z+6=0$$

$$\pi_8: z-2=0$$

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך בין המישורים.

67. מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi: 6x-5y+z+18=0$ עם המישור $[xz]$.

68. נחונים שני מישורים:

$$\pi_1: x-3y+2z-1=0$$

$$\pi_2: 4x+y-z-6=0$$

מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

69. המישורים π_1 ו- π_2 מאונכים זה לזה.

הישר $\ell: \underline{x} = (4,1,-1) + t(2,-1,1)$ הוא ישר החיתוך בין המישורים.

מצא את משוואות המישורים אם ידוע שהמישור π_1 עובר בראשית.

70. נחונים ישר ומישור:

$$\ell: \underline{x} = (-2,0,5) + t(3,1,-1)$$

$$\pi: 4x-2y-3z-6=0$$

מצא הצגה פרמטרית של הישר שהוא היטלו של הישר ℓ על המישור.

71. מצא את הזווית בין הישרים הבאים:

$$\ell_1: \underline{x} = (3, -11, 2) + t(2, 4, -1)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (7, 0, -1) + s(0, 5, -1)$$

72. מצא את הזווית בין הישר והמישור הבאים:

$$\ell: \underline{x} = (1, 0, 3) + t(-3, 1, -5)$$

$$\pi: 2x - y - 3z + 5 = 0$$

73. מצא את הזווית בין הישר והמישור הבאים:

$$\ell: \underline{x} = (-2, 0, 5) + t(-2, 1, 2)$$

$$\pi: 3x - 2y + 2z + 9 = 0$$

74. מצא את הזווית בין המישורים הבאים:

$$\pi_1: 3x + 2y - z - 8 = 0$$

$$\pi_2: 5x - y - z + 10 = 0$$

75. מצא את הזווית בין המישורים הבאים:

$$\pi_1: 4x + 3y + z - 12 = 0$$

$$\pi_2: 4x - 7y + 5z + 3 = 0$$

76. מצא את המרחק בין הנקודות $A(-1, 3, 2)$ ו- $B(9, 1, 0)$.

77. מצא את המרחק בין הנקודה $A(-4, 12, -5)$ לישר $\ell: \underline{x} = (1, 1, -4) + t(3, -1, 2)$.

78. מצא את המרחק בין הנקודה $A(13, -1, -19)$ לישר $\ell: \underline{x} = t(2, 0, -7)$.

79. נחונות הנקודות: $A(1, 6, -1)$, $B(2, -1, 0)$, $C(6, -4, 0)$. חשב את שטח המשולש $\triangle ABC$.

80. על הישר $\ell: \underline{x} = (5, -2, 0) + t(0, 1, -1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע $ABCD$. אחד מקודי הריבוע הוא $D(5, 4, 2)$. מצא את שיעורי הקודקוד B (שתי אפשרויות).

81. מצא את המרחק בין הנקודה $A(5, 3, -1)$ למישור $x - 2y + 2z - 12 = 0$.

82. מצא את מרחקו של המישור $4x - 2y - 4z + 15 = 0$ מראשית הצירים.

83. מצא משוואת מישור המאונך לישר $\ell: \underline{x} = (1, -8, 3) + t(3, -2, 1)$

ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4, 5, -9)$.

84. נחונים ישר ומישור:

$$\ell: \underline{x} = (7, 19, -3) + t(3, 14, -4)$$

$$\pi: 2x + 4y - 4z + 15 = 0$$

מצא את הנקודות על הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

85. חשב את נפחה של פירמידה משולשת $SABC$ שקודקודיה הם:
 $A(1,6,-1)$, $B(2,-1,0)$, $C(6,-4,0)$, $S(11,-2,4)$.
86. בפירמידה משולשת $SABC$ המקצועות SA , SB ו- SC מאונכים זה לזה.
 נתון: $SA = 6$, $SB = 8$, $SC = 12$.
 חשב את אורכו של גובה הפירמידה היורד מהקודקוד S לבסיס ABC .
87. נתונים שני ישרים:
 $\ell_1: \underline{x} = (-4, 6, 4) + t(2, 3, 0)$
 $\ell_2: \underline{x} = (1, 7, 1) + s(2, 3, 0)$
 הראה שהישרים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.
88. נתונים ישר ומישור:
 $\ell: \underline{x} = (2, -4, 1) + t(-5, 1, -4)$
 $\pi: 2x + 6y - z + 6 = 0$
 הראה שהישר מקביל למישור ומצא את המרחק בין הישר למישור.
89. נתונים שני מישורים:
 $\pi_1: 2x + 2y - z + 7 = 0$
 $\pi_2: 2x + 2y - z - 5 = 0$
 הראה שהמישורים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.
90. נתונה משוואת מישור:
 $\pi: 3x - 4y + 5z - 10 = 0$
 מצא משוואת מישור המקביל למישור הנתון ונמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.
91. נתונים שני מישורים מקבילים:
 $\pi_1: x - 2y - 2z + 6 = 0$
 $\pi_2: x - 2y - 2z - 12 = 0$
 מצא את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים ונמצא במרחק שווה משניהם.
92. נתונים שני ישרים. הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק ביניהם:
 $\ell_1: \underline{x} = (-3, 2, 6) + t(-4, 1, 2)$
 $\ell_2: \underline{x} = (0, 2, -7) + s(1, 0, -1)$
93. נתונים שני ישרים מצטלבים. מצא את המרחק ביניהם:
 $\ell_3: \underline{x} = (-1, 0, 5) + t(1, 1, -2)$
 $\ell_4: \underline{x} = (2, -1, 9) + s(6, -1, 0)$
94. מצא את מרחק הישר $\ell: \underline{x} = (4, -2, -1) + t(-1, 1, 6)$ מציר ה- z .
95. נתונה קוביה $ABCD A'B'C'D'$ שנפחה הוא 8. משוואת המישור שעליו מונח הבסיס $ABCD$ היא: $\pi_1: 4x + y + 3z - 28 = 0$.

משוואת המישור שעליו מונחת הפאה $ABB'A'$ היא: $\pi_2: x+2y-2z+6=0$.
מצא הצגה פרמטרית של הישר עליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).

96. נתונים שני ישרים:

$$\ell_1: \underline{x} = (-2, 1, 5) + t(5, -4, 2)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (-7, 3, -1) + s(-5, 4, -2)$$

א. מצא את המצב ההדדי בין הישרים.

ב. המישור π_1 מכיל את שני הישרים והמישור π_2 נמצא בין שני הישרים במרחק שווה מכל אחד מהם, מקביל לשני הישרים ומאונך למישור π_1 . מצא את משוואות המישורים π_1 ו- π_2 .

97. נתונים שני מישורים:

$$\pi_1: 2x - y + 4z - 8 = 0$$

$$\pi_2: x - y + 2z - 4 = 0$$

המישור π_3 מכיל את ישר החיתוך של שני המישורים וחותר את ציר ה- y בנקודה A כך שמתקיים $OA = m$ (O ראשית הצירים).

הזווית בין המישור π_2 למישור π_3 היא α ונתון כי: $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.
מצא את הערכים האפשריים של הפרמטר m .

98. נתונות שלושה נקודות: $O(3, 1, 0)$, $B(2, -1, 0)$, $A(3, -1, 1)$.

הנקודות A ו- B נמצאות על היקפו של מעגל שהנקודה O היא מרכזו.

מצא הצגה פרמטרית של הישר המשיק למעגל בנקודה A (הישר נמצא במישור המעגל).

99. הנקודה $A(4, 0, -1)$ נמצאת על כדור שמרכזו $O(1, 1, 2)$.

מצא את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A .

100. נתונים מישור וישר:

$$\pi: 2x - y + 2z + 1 = 0$$

$$\ell: \underline{x} = (1, 5, 5) + t(1, 1, 0)$$

מצא נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- z הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.

101. נתונים שני מישורים:

$$\pi_1: 2x - 4y + 4z - 5 = 0$$

$$\pi_2: 4x - 2y + 4z - 1 = 0$$

מצא הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור π_1 ובמרחק 6 ממישור π_2 (מצא הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).

102. נתונים ישר ומישור:

$$\ell_1: \underline{x} = (0, -3, 0) + t(1, 1, -8)$$

$$\pi: 6x + 2y - z + 5 = 0$$

ישור נוסף, ℓ_2 , המקביל למישור π , עובר בנקודה $P(1, 0, -4)$ וחותר את הישר ℓ_1 בנקודה Q .

מבין הנקודות שבמישור π , הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q . מצא את שטח המלבן $PQQ'P'$.

(הדרכה: הבע באמצעות t את וקטור הכיוון של ℓ_2 .)

103. נתונים שני מישורים:

$$\pi_1: 2x + y + z - 5 = 0$$

$$\pi_2: 3x + y + 2z + 11 = 0$$

ℓ_1 הוא ישור החיתוך בין שני המישורים. המישור π_3 מכיל את הישר ℓ_1 ויוצר זווית של

60° עם הישר $\ell_2: \underline{x} = (1, 3, -4) + t(1, 1, 0)$. מצא את משוואת המישור π_3 .

פתרונות:

2. $\underline{u} = (5, 8, 0)$, $\underline{v} = (5, 8, 6)$ 3. $D(6, -8, 1)$ 4. $\underline{u} = (4, 11, 5)$ 5. $(7, 1, 2)$
6. א. $\overline{AB} = (9, -4)$ ב. $Q = (12, 8)$ 7. א. $\overline{EF} = (5, -1, 0)$ ב. $N(-1, -5, 10)$
8. $D(6, -8, 1)$ 9. $\underline{u} = (0, -7, 6)$, $\underline{v} = (-4, 7, 6)$ 10. א. $(5, 4, 6)$ ב. $(1, 10, -4)$
11. $(6, 14, 2)$ 12. $(7, 24, -2)$ 13. ה. -10 14. $\sqrt{21}$ 15. א. 97.277° ב. 90° ג. 180° 16. 10.173 17. א. $\underline{w} = (3, 6, -5)$ או $\underline{w} = (-3, -6, 5)$
18. ב. 19. לא. 20. $l: \underline{x} = (-5, -2) + t(6, 8)$
21. $l: \underline{x} = (4, 1, 1) + t(1, 1, 3)$ 22. $l: \underline{x} = (2, -7, 1) + s(-4, 2, 1)$ 23. $l: \underline{x} = t(0, 1, 0)$
24. $l: \underline{x} = (3, -1, 4) + t(0, 0, 1)$ 25. $(7, -5, 0)$ 26. מתלכדים. 27. מקבילים.
28. נחתכים, $(1, 5, 0)$ 29. מצמלבים. 30. מקבילים. 31. נחתכים, $(1, 8, -1)$
32. א. $k = 2$ ב. $k = -2$ 33. $\pi: \underline{x} = (1, -4, 0) + t(2, 10, 2) + s(-1, 1, 1)$
34. $\pi: \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(5, -2, -1)$ 35. $\pi: \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4) + s(8, 9, -6)$
36. $\pi: \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(0, 0, 1)$ 37. $\pi: \underline{x} = (7, 0, 0) + t(0, 0, 1) + s(-7, 12, 0)$
38. $\pi: \underline{x} = (7, 0, 0) + t(0, 0, 1) + s(-7, 12, 0)$
39. $\pi: \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(0, 0, 1)$
40. א. על המישור. ב. לא על המישור. 41. $k = 3$ 42. $(3, 0, 0)$, $(0, 4, \frac{1}{2})$, $(0, 0, -9)$
43. $l: \underline{x} = (0, -8, 0) + t(0, 2, 1)$ 44. $\pi: \underline{x} = (0, 0, 8) + t(0, -2, -8) + s(-8, 0, -8)$
45. $\pi: \underline{x} = (0, 0, 4) + t(0, 1, 0) + s(6, 0, -4)$ 46. $\pi: -2x + 3y + z + 19 = 0$
47. $\pi: x - 3y + 8z = 0$ 48. $\pi: 3x + 6y - z - 6 = 0$ 49. $\pi: y = 0$ 50. $k = 3$
51. $\pi: x - 3y + 8z = 0$ 52. $k = 3$
53. 6 ח"ג. 54. הישר חותר, $(1, -1, 3)$ 55. מקבילים. 56. הישר מוכלל. 57. הישר חותר,
58. $(3, 0, 4)$ 59. $a = 1, b = -7$ 60. $l: \underline{x} = t(1, 9, 13)$ 61. א. $k \neq 2, -3$ ב. $k = -3$ ג. $k = 2$ 62. $\pi_{A'B'C'D'}: 2y + z + 2 = 0$
63. $l: \underline{x} = (-2, 6, 0) + t(2, 16, 12)$ 64. $l: \underline{x} = (0, 2, 2) + t(1, 2, 4)$
65. $l: \underline{x} = (0, 4, 10) + t(4, 7, \frac{1}{3})$ 66. $l: \underline{x} = (0, 2, 2) + t(4, 2, 0)$

- .67 $l: \underline{x} = (-3, 0, 0) + t(3, 0, -18)$.68 $l: \underline{x} = t(1, 9, 13)$
- .69 $\pi_1: y + z = 0, \pi_2: x + y - z - 6 = 0$.70 $l': \underline{x} = (-5, -13, 0) + t(7, 11, 2)$
- .71 26.01° .72 21.19° .73 18.87° .74 43.94° .75 90° .76 $\sqrt{108}$.77 $\sqrt{91}$
- .78 $\sqrt{54}$.79 12.75 ש"ח .80 $B(5, 4, -6)$ א $B(5, -4, 2)$.81 .5 .82 $2\frac{1}{2}$
- .83 $\pi: 3x - 2y + z + 21 = 0$ א $\pi: 3x - 2y + z - 7 = 0$.84 $(4, 5, 1)$ א $(1, -9, 5)$
- .85 20.5 י"ח .86 4.46 יחידות אורך .87 $\sqrt{22}$.88 $\frac{15}{\sqrt{41}}$.89 .4
- .90 $\pi_2': 3x - 4y + 5z - 30 = 0, \pi_1': 3x - 4y + 5z + 10 = 0$.91 $\pi_3: x - 2y - 2z - 3 = 0$
- .92 $\frac{4}{\sqrt{6}}$.93 1.567 .94 $\sqrt{2}$.95 $\pi_{DCC'D'}: x + 2y - 2z = 0$ א
- .96 א .96 מקבילים $\pi_{DCC'D'}: x + 2y - 2z + 12 = 0$
- .97 $m = 4, -\frac{4}{7}$.98 $\pi_1: 2x + 2y - z + 7 = 0, \pi_2: y + 2z - 6 = 0$
- .99 $\pi: -3x + y + 3z + 15 = 0$.98 $l: \underline{x} = (3, -1, 1) + k(-5, -2, -4)$
- .100 $(0, 0, 4)$ א $(0, 0, 14\frac{4}{5})$.101 $l: \underline{x} = (0, -14, -15\frac{3}{4}) + t(-14, 14, 21)$
- .102 10.476 ש"ח .103 $\pi_3: x + 2y - z - 58 = 0$ א $\pi_3: 2x + y + z - 5 = 0$